データ解析（国際開発）
(1) ガイダンス，線形システムの復習

高田潤一
takada@ide.titech.ac.jp

2010 年 4 月 12 日

概 要

本日は，データ解析のシラバスを説明した後に，線形システムについて簡単に復習する．

1　シラバス

講義のねらい

時系列，電気信号などのデータ系列から雑音・変動成分を除去したり，周波数などの特徴量の抽出を行う手法を講義する．

何の役に立つのか？

時系列データは，工学を含む様々な分野における観測データのうち，もっとも典型的なものである．このデータから外乱を除去して特長量を抽出することは，観測データを支配する様々な要素を理解するために必要といえる．

講義計画

1. 線形システム理論の復習：波形とスペクトル，インパルス応答，伝達関数，畳み込み
2. 連続信号の離散化：標本化定理，エリアシング，量子化
3. 演習：連続信号の離散化（正弦波）
4. 離散フーリエ変換：離散フーリエ変換，窓関数，高速フーリエ変換
5. 短時間フーリエ変換：スペクトログラム，不確定性原理
6. 演習：離散フーリエ変換・短時間フーリエ変換（音声）
7. 中間試験
8. 確率過程論の基礎 (1)：定義，定常過程，平均・相関，エルゴード性
9. 確率過程論の基礎 (2)：スペクトル，ウィナー・ヒンチンの定理，ガウス過程

10. 確率過程論の基礎 (3)：雑音，フィルタリング

11. 電力スペクトル解析：ペリオドグラム，Blackman-Tukey 法

12. 演習：確率過程・電力スペクトル解析（整合フィルタ，ペリオドグラム）

13. 雑音の除去：加算平均，移動平均，フィルタ

14. 演習：雑音の除去（加重平均，低域通過フィルタ）

なお，演習には Scilab (http://www.scilab.org) を利用する予定.

教科書・参考書等

本年度は以下の教科書に基づいて講義を行う.

- 斉藤，信号とシステム，コロナ社，2003
- 谷萩，ディジタル信号処理の理論 1 基礎・システム・制御，コロナ社，1985
- コーエン，時間-周波数解析，朝倉書店，1998
- Haykin, Communication Systems, McGraw Hill, 2001
- 中溝，信号解析とシステム同定，コロナ社，1988
- 鳥居，計測と信号処理，コロナ社，1997
- 谷萩，ディジタルフィルタと信号処理，コロナ社，2001

関連科目・履修の条件等

工学数学 A, C，線形システム論を履修していることが望ましい.

成績評価

成績評価は中間試験，期末試験により行うほか，講義への参加を加味する．配点は，中間試験 35 点，期末試験 35 点，出席 15 点，演習 15 点とする.

オフィスアワー

火曜日 17:00〜18:00. 事前に takada@ide.titech.ac.jp にて連絡することが望ましい.

その他

原則として，講義で使用する資料は当日配布し，OCW-i からダウンロードできるようにする予定.

2　線形システム理論の復習

本講義では，主にデータの周波数解析及び雑音（外乱）除去に焦点を当てたデータの解析について説明する．これらの手法は主に線形システムの理論に基づいているので，最初に線形システム論について復習する．

2.1　線形システムとは

線形システムとは，入力の線形結合に対して出力の線形結合が確保されているシステムである．すなわち，システム入力 $x_1(t), x_2(t)$ に対する出力が $y_1(t), y_2(t)$ である場合，入力 $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ に対する出力が $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ で表されるのが，線形システムである．

このような線形性を満足するシステムは，定数倍，微分，積分，遅延などの演算子で記述することができる．

2.2　波形とスペクトル

波形 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(f)$ を $x(t)$ のスペクトルという[1]．

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-\mathrm{j}2\pi f t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

スペクトルは，波形を正弦波の和として表すときの各周波数成分の複素振幅を表す．逆にスペクトル $X(f)$ のフーリエ逆変換は波形 $x(t)$ となる．

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(\mathrm{j}2\pi f t)\mathrm{d}f \tag{2}$$

以下では，フーリエ変換対を $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f)$ と書く．

よく使われるフーリエ変換の公式を挙げておく．

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} c_1X_1(f) + c_2X_2(f) \text{ ：線形性} \tag{3}$$

$$x(t-\tau) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \exp(-\mathrm{j}2\pi f\tau)X(f) \text{ ：時間シフト} \tag{4}$$

$$\exp(\mathrm{j}2\pi\nu t)x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f-\nu) \text{ ：変調} \tag{5}$$

$$1 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \delta(f) \text{ ：線スペクトル} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{j}2\pi f X(f) \text{ ：微分} \tag{7}$$

2.3　時不変性

時不変システムとは，入出力関係が時間シフトに対して変化しないシステムである．すなわち，システム入力 $x(t)$ に対する出力が $y(t)$ である場合，入力 $x(t-\tau)$ に対する出力が $y(t-\tau)$ で表されるのが，時不変システムである．

[1]本講義では角周波数 ω ではなく周波数 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ を使用する．特にフーリエ逆変換の係数に注意．

2.4　因果性

因果的システムとは，出力が現在及び過去の入力のみで決定されるシステムである．すなわち，システム入力 $x_1(t), x_2(t)$ が

$$x_1(t) = x_2(t),\ t \leq t_0 \tag{8}$$

の場合，出力 $y_1(t), y_2(t)$ が

$$y_1(t) = y_2(t),\ t \leq t_0 \tag{9}$$

で表されるのが因果的システムである．

2.5　インパルス応答

線形時不変システムにおいては，デルタ関数 $\delta(t)$ を入力した場合の出力 $h(t)$ が判れば，任意の入力 $x(t)$ に対する出力 $y(t)$ は

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t-\tau)\mathrm{d}t \tag{10}$$

で表される．$h(t)$ をインパルス応答，式 (10) の積分を畳み込み積分といい，記号 $x(t) * h(t)$ または $(x * h)(t)$ で表す．これは，入力 $x(t)$ を Δt 間隔のインパルス列で近似し，インパルス応答を係数 $x(n\Delta t)$ 倍し，$n\Delta t$ だけ時間シフトして重ね合わせたものであるといえる．

2.6　伝達関数

畳み込み積分に関するフーリエ変換の公式

$$x(t) * h(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(f)H(f) \tag{11}$$

を用いると，周波数領域では入力スペクトル $X(f)$ と出力スペクトル $Y(f)$ との関係は，周波数成分ごとに比例定数 $H(f)$ 倍となる．この $H(f)$ を伝達関数という．

課題

式 (10) をフーリエ変換し，式 (11) が成り立つことを示せ．

締切は 4 月 16 日（金）9:00 とし，講義開始前に回収する．前日までに提出する場合には，メールボックス S6-4（南 6 号館ロッカー室横）に提出のこと．表紙は必要ないが，大きさは A4 判とし，学籍番号・氏名・提出日を上部欄外に記入すること．

参考文献

[1] 斉藤洋一，信号とシステム，第 2 章，コロナ社，2003