工学計測 II
(2) 電気回路

高田潤一
takada@ide.titech.ac.jp

2010 年 6 月 15 日

概 要

本日は電気回路について説明する．なお，図面は省略しているので，このプリントはメモ程度に考えて欲しい．内容的には線形システム論の復習である．

1 回路素子

電気回路は線形の素子のみで回路が構成されるので，線形回路とも呼ばれる．なお，半導体による非線形回路を含む場合には，電子回路として区別する．

1.1 受動回路素子

受動回路素子は，電磁気学の一次元的な抽象化である．

抵抗 導電率が有限である物体に電圧を印加すると，これに比例して電流が流れる（オームの法則）．

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} \tag{1}$$

この式もオームの法則と呼ばれる．

インダクタと変圧器 コイルに電流を流すと，電流の変化を妨げる向きに起電力を発生する（ファラデーの法則）．

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

2 つのコイルが互いに結合しているとき，一方のコイルに電流を流すと，その変化に比例して，他方のコイルにも起電力を発生する．

$$v_1(t) = L_1\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

$$v_2(t) = M\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

L_1, L_2 は自己インダクタンス，M は相互インダクタンスと呼ばれ，

$$L_1L_2 \geq M^2 \tag{5}$$

である．

キャパシタ　平行平板キャパシタに電流を流すと電荷が電極に蓄積する（拡張されたアンペアの法則）.

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

1.2　電圧源と電流源

理想的な電圧源は端子間電圧が一定で任意の電流を流すことができる．理想的な電流源は流れる電流が一定で任意の電圧を発生することができる．いずれも実現は不可能であるが，線形回路ではこの仮定が成り立つ範囲で議論する．なお，一般的な電源回路には内部抵抗がある．

2　キルヒホフの法則

連続した導線上はすべて等電位となる．また，2 本の導線が接続されている場合，交点を黒丸で表し，これら 2 本の導線上は等電位となる．これらの導線は電気的には節点と呼ばれるひとつの点で表される．

節点に流れ込む電流の合計が 0 であることをキルヒホフの電流法則 (KCL) という．これは，節点に電荷が蓄積されないことを示している．

任意の閉路に対して電圧の合計が 0 であることをキルヒホフの電圧法則 (KVL) という．これは，電界が保存場であるためにその経路によらず始点と終点で電位差が決定することを表す.

3　微分方程式から代数方程式へ

各素子に与えられた条件と KCL/KVL を組み合わせることによって微分方程式を得る．微分演算子が線形性を有するので，得られる方程式も線形の微分方程式である．このため，電気回路は線形回路であるといわれる．

微分方程式を代数方程式に変換するためにはフーリエ変換やラプラス変換が用いられる．特に電気回路では正弦波交流を扱うことが多いが，この場合にはフーリエ変換を用いると都合がよい．一方，一般の波形を扱う場合にはラプラス変換を用いると都合がよいが，それについては制御理論の項でまとめて説明する．

式 (1), (2), (6) をそれぞれフーリエ変換すると次の方程式を得る．

$$V(\omega) = RI(\omega) \tag{7}$$

$$V(\omega) = \mathrm{j}\omega LI(\omega) \tag{8}$$

$$V(\omega) = \frac{I(\omega)}{\mathrm{j}\omega C} \tag{9}$$

なお，電気回路の理論では i を電流の記号として用いるため，虚数単位には j を用いるのが通例である．また，フーリエ変換領域の変数も周波数 f でなく角周波数 $\omega = 2\pi f$（オメガ）を用いるのが通例である．

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t \tag{10}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\exp(\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{11}$$

一般に受動回路素子またはその組み合わせに対して，端子電流 $I(\omega)$ と端子電圧 $V(\omega)$ の間に，

$$V(\omega) = (R + \mathrm{j}X)I(\omega) = ZI(\omega) \tag{12}$$

が成り立つとき，R を抵抗，X をリアクタンス，Z をインピーダンスという．交流回路では (ω) を省略する場合が多い．この場合，通常のフーリエ変換の記法と同じく小文字が時間領域，大文字が角周波数領域を表す．

交流信号を対象とする場合，

$$\begin{aligned} \cos(\omega t + \psi) &= \frac{\exp\{\mathrm{j}(\omega t + \psi)\} + \exp\{-\mathrm{j}(\omega t + \psi)\}}{2} \\ &= \mathcal{R}[\exp\{\mathrm{j}(\omega t + \psi)\}] \end{aligned} \tag{13}$$

となる．すなわち，角周波数領域の電圧・電流に $\exp(\mathrm{j}\omega t)$ を掛けて実部をとれば，時間領域の電圧・電流に換算できる．

4 電力

電圧 $v(t) = V_0 \cos \omega t$ を印加し，電流 $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \psi)$ が流れる場合，消費電力 P は

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T v(t)i(t)\mathrm{d}t \\ &= V_0 I_0 \int_0^T \frac{1}{2T}\left[\cos\{2\omega t + \psi\} + \cos\psi\right] \\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{2}V_0 I_0 \cos\psi \end{aligned} \tag{14}$$

で表される[1]．これを角周波数領域で表すと，

$$P_\mathrm{c} = \frac{1}{2}V(\omega)I^*(\omega) \tag{15}$$

と表すことができ，P_c の実部が消費電力に，虚部は一時的に蓄積される無効電力になる．

一般的な電源回路には内部抵抗 R_0 がある．電源回路の外側に付加される回路を負荷回路というが，負荷回路のインピーダンス Z_L によって，負荷で消費される電力 P_L は異なる．このとき，最大電力供給の法則

$$\max P_\mathrm{L} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{2R_0} \tag{16}$$

が成り立ち，これを満足するのは

$$Z_\mathrm{L} = R_0 \tag{17}$$

の場合である．

[1] このため，交流回路理論では最大値の代わりに実効値

$$\begin{aligned} V_\mathrm{e} &= \& \tfrac{1}{\sqrt{2}}V_0 \\ I_\mathrm{e} &= \& \tfrac{1}{\sqrt{2}}I_0 \end{aligned}$$

が用いられ

$$P = V_\mathrm{e} I_\mathrm{e} \cos\psi$$

と表す．

5　線形回路の例

線形回路の代表的な例が低域通過フィルタであり，RC フィルタ，LC フィルタなどがある．

課題

式 (16) 及び (17) を証明せよ．

締切は 6 月 17 日（木）10:40 とし，講義開始前に回収する．前日までに提出する場合には，メールボックス S6-4（南 6 号館ロッカー室横）に提出のこと．表紙は必要ないが，大きさは A4 判とし，学籍番号・氏名・提出日を上部欄外に記入すること．