

3. 平面波

ここからは調和関数、つまり波形は時間的な変化として全て正弦波であるものとして扱う。そのとき、時間表現の代わりに複素表現（時間波形をフーリエ変換したもの）を用いると $\frac{d}{dt} = j\omega$ となって、時間に関して微分方程式が代数方程式になり、簡単に計算できる。

3.1 平面波の性質

ベクトル波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}$$

ヘルムホルツの波動方程式(Helmholtz eq.)

$$\nabla^2 \psi = 0$$

ラプラスの方程式(Laplace eq.)

$$\nabla^2 \psi = -\rho$$

ポアソンの方程式(Poisson eq.)

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

スカラー波動方程式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

ラプラシアン(Laplacian)の定義

直角座標では $\nabla^2 \mathbf{A}$

[説明] 波動方程式と波動関数

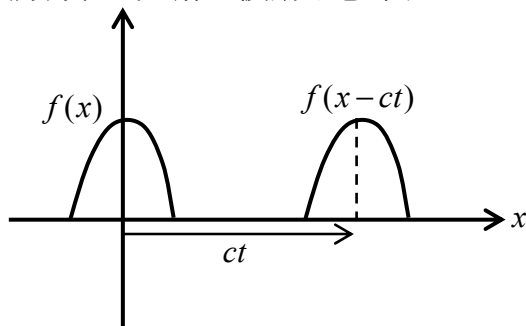
微分方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

の解は $f(x \pm ct)$ となり（代入して簡単に確認できる）、 $f(x \pm ct)$ は波動関数(wave function)と呼ばれる。 x に位置、 t に時間という物理的意味付けをすると、それぞれ $\mp x$ 方向に速度 c で進む波を表すからである。

もう少し説明を加えると、 $t=0$ のとき $f(x)$ であり、 $t=1$ のときは $f(x \pm c)$ となり、 $f(x)$ のグラフは $\mp c$ だけ x 軸方向に平行移動するからである。（高校の数学で習ったグラフの平行移動） t が連続的に変化するとグラフの形はだんだん平行移動してずれていく（つまり波動である）。

最初の微分方程式は解が波動を意味するので、波動方程式(wave equation)と呼ばれる。



[説明] 時間表現と複素表現について

電気回路で電圧と電流を複素表現して計算するように、電磁波でもよく複素表現が使われる。複素表現を用いると正弦波をかけているときの時間の扱いが簡単になる（微分方程式が代数方程式になる）からである。

[時間表示]		[複素表示]
$\mathbf{e}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \theta)$	$\mapsto$	$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\sqrt{2}} e^{j\theta} = \mathbf{E}_e e^{j\theta}$
方程式: $\nabla^2 \mathbf{e} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{e} = 0$	$\Leftrightarrow$	$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$
(時間に関して)		(時間に関して)
微分方程式を解く		代数方程式を解く
		↓
$\mathbf{e}(t) = \text{Re}[\sqrt{2} \mathbf{E} e^{j\omega t}]$	$\leftarrow$	$\mathbf{E}$

複素表示は（ずっと過去からずっと未来まで）正弦波で励振し続けた時の定常状態の解を計算するときに使われる。複素表示を使わなくても解けるのだが、（時間に関する）微分方程式を解かなければならず、計算が煩雑になる。それに対して、複素表示に変換して計算を行うと（時間に関しては）代数方程式を解く問題となり、計算が簡単になる。

そして、複素表示の世界で計算した解ともとの時間表示の世界で計算した解は対応する。これを数学の分野では準同形写像と言う。電気回路では電圧と電流の複素表現において、上のように $\sqrt{2}$ をつけて実効値表現するが、電磁波では $\sqrt{2}$ を付けずに、複素表現においても振幅は尖頭値（ピーク値）表現することが多い（その場合には電力を計算するときにポインティングベクトルの計算は2で割ることになる）。

平面波とは？

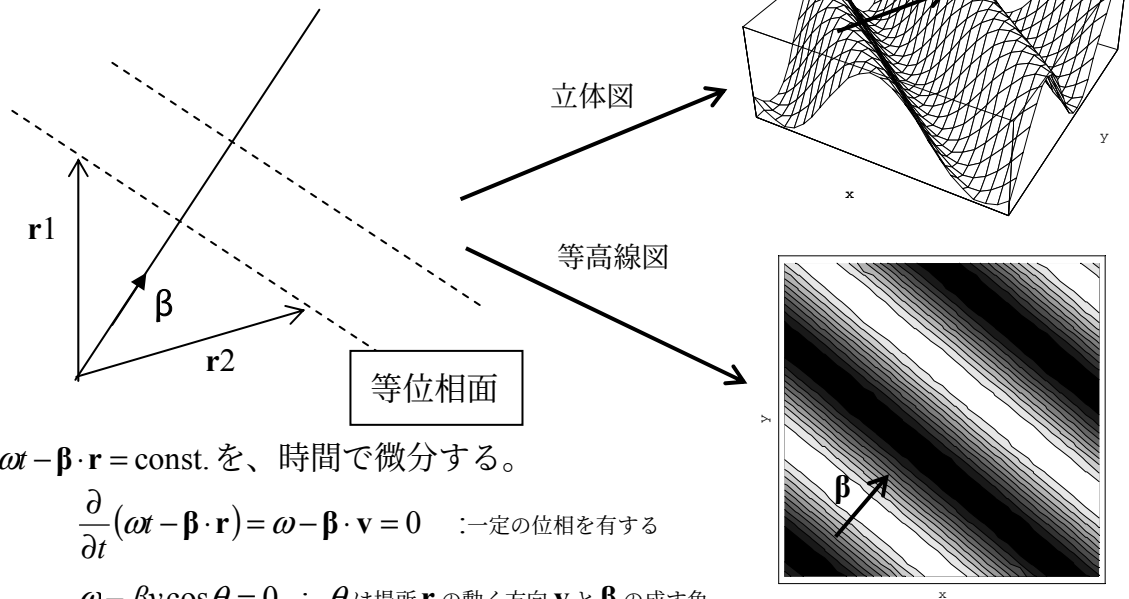
$$f(\omega t - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \text{ 平面波}$$

$\omega t - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} = \text{const.}$ (時間とともに動く等位相面。右の const. は位相を表す)

ある時間 $t = t_1$ における等位相面 (位相とは、正弦波の引数の角度のことである) を考える。

2つの場所 $\mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_2$ で等位相とすると $\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0$

つまり、等位相面は $\boldsymbol{\beta}$ に垂直である。



式 $\omega t - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r} = \text{const.}$ を、時間で微分する。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega t - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) = \omega - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{一定の位相を有する}$$

$$\omega - \beta v \cos \theta = 0 \quad \text{: } \theta \text{ は場所 } \mathbf{r} \text{ の動く方向 } \mathbf{v} \text{ と } \boldsymbol{\beta} \text{ の成す角}$$

$$v = \left(\frac{\omega}{\beta} \right) \frac{1}{\cos \theta} = v_0 \frac{1}{\cos \theta}$$

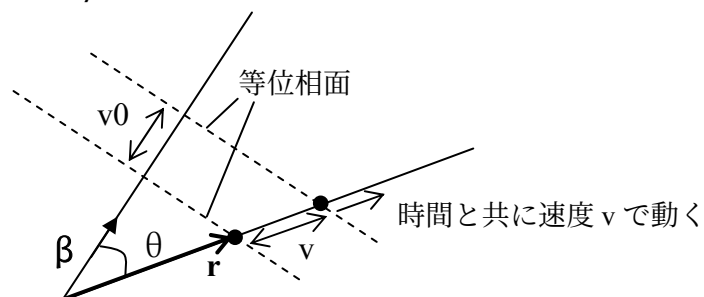
どの方向に沿って見ても波動になっている。

位相速度 (phase velocity, 波面が動く速度) は θ を一定にして眺めると

$\boldsymbol{\beta}$ 方向 ($\theta = 0^\circ$) が最小 v_0

$\boldsymbol{\beta}$ に垂直方向 ($\theta = 90^\circ$) 最大 ∞

エネルギーは $\boldsymbol{\beta}$ 方向に速度 $\frac{\omega}{\beta}$ で進む平面波 (等位相面が平面の波)



波動方程式の導出と解

Maxwell の方程式において $\mathbf{i}=0$, $\rho=0$ の時 (自由空間) を考え、 $\mathbf{E}$ あるいは $\mathbf{H}$ の方程式を導出する。

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = k^2\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = k^2\mathbf{E}$$

$$k^2 = \omega^2\epsilon\mu$$

数学公式を用いる。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = k^2\mathbf{E}$$

ここで、 $\rho=0$ より $\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ だから、 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ を得る。ゆえに

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

上の式を電界のヘルムホルツの波動方程式と言う (波動方程式の 3 次元バージョン)。なお、磁界 $\mathbf{H}$ も同方程式を満足する。 $\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0$

1) $\hat{\mathbf{k}}$ 方向へ進む平面波はこの方程式の 1 つの解である。

($\mathbf{A}$ と $\mathbf{k}$ は次の関係を満たす。ここでは結果だけをまとめ、導出は 2 で行う)

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = 0) \quad (\text{横波条件})$$

$$|\mathbf{k}| = k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = c \quad (\text{光速})$$

$$\epsilon = \frac{10^{-9}}{4\pi \times 8.988}$$

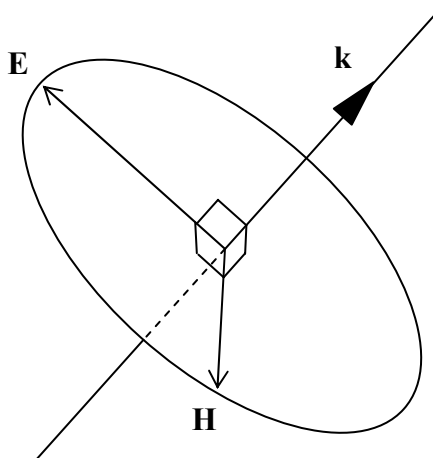
$$\mu = 4\pi \times 10^{-7}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \\ \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (\text{電界、磁界、波数ベクトルは互いに直角})$$

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120\pi [\Omega]$$

$$|\mathbf{k}| = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$$



2 で割っているのは $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ の絶対値は実効値でなく、尖頭値だから。

Power

$$\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \quad \left[\text{Watt} / \text{m}^2 \right]$$

ポインティング・ベクトル(Poynting Vector)

その場を通過する電磁波の電力密度を示す。上のベクトルの大きさが単位面積あたりを通過する電力量であり、向きは電力が進む方向を示す。

線形重ね合せも解である（波動方程式の線形性より）。

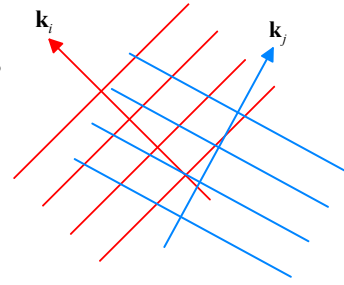
$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \mathbf{A}_i e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$$

$$|\mathbf{k}_i| = k$$

$$\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{k}_i = 0$$

$\mathbf{k}_i$ は波 i の波数ベクトル

$\mathbf{A}_i$ の振幅と位相はそれぞれ $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ の場所での波 i の振幅と位相を表す。



$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}$ (全ての $\mathbf{k}_i$ が同じ $\mathbf{k}$) のとき、偏波を考察(3.3 節)

$\mathbf{k}_i \neq \text{一定}$ ($\mathbf{k}_i$ が異なる) のとき、定在波（あるいは定常波）を考察(3.2 節)

2) 波動方程式を満足する条件として $\mathbf{A}$ と $\boldsymbol{\beta}$ を求めてみる。

$\mathbf{A}$, $\boldsymbol{\beta}$ が場所に依らないことを仮定

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} e^{-j\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}}$$

$\mathbf{A}$ と $\boldsymbol{\beta}$ を未知数として、解を上式の式のように仮定する。

$$\mathbf{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$$

$$\boldsymbol{\beta} = \hat{x}\beta_x + \hat{y}\beta_y + \hat{z}\beta_z$$

$$\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z \quad (\text{位置ベクトル})$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &\stackrel{\Delta}{=} \mathbf{E} e^{+j\omega t} = \mathbf{A} e^{-j\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}} e^{+j\omega t} \\ &= \mathbf{A} e^{j(\omega t - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})} = f(\omega t - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{平面波} \end{aligned}$$

位相

$$\dot{E}_x = A_x e^{-j\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}} e^{+j\omega t} \rightarrow A_x \sin(\omega t - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})$$

$$\dot{E}_y = A_y e^{-j\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}} e^{+j\omega t} \rightarrow A_y \sin(\omega t - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})$$

$$\dot{E}_z = A_z e^{-j\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}} e^{+j\omega t} \rightarrow A_z \sin(\omega t - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})$$

Helmholtz の方程式の解であるために、

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0 \rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

↓

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0$$

$$\nabla^2 E_y + k^2 E_y = 0$$

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [A_x e^{-j(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z)}] = -\beta_x^2 E_x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} E_x = -\beta_y^2 E_x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = -\beta_z^2 E_x$$

$$-(\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2) E_x + k^2 E_x = 0$$

$$|\boldsymbol{\beta}| = k \quad (\text{非自明解 } \mathbf{E} \neq 0 \text{ を持つための条件})$$

上の結果によって、Maxwell の方程式の解の平面波は光速で進むことがわかる。（後述）

さらに、波源のない時のガウスの法則を満足するために、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -j\beta_x E_x - j\beta_y E_y - j\beta_z E_z$$

$$= -j\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} = 0$$

波の進行方向 $\boldsymbol{\beta}$ と変位方向 $\mathbf{E}$ は直交するので横波である。

2 つの必要条件

$$|\boldsymbol{\beta}| = k \quad (\text{光速})$$

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (\text{横波})$$

磁界を求める。(β を $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$ で表す。)

ファラデーの法則より、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{-j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}$$

$$= \frac{1}{-j\omega\mu} \left[\hat{x} \left(\frac{\partial}{\partial y} A_z e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial z} A_y e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_x e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial x} A_z e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial y} A_x e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \right]$$

$$\text{notes; } \nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -jk_x e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \text{ のとき、} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -j\mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

$$= \frac{-j}{-j\omega\mu} [\hat{x}(A_z k_y - A_y k_z) + \hat{y}(A_x k_z - A_z k_x) + \hat{z}(A_y k_x - A_x k_y)] e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$= \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega\mu} = \frac{k}{\omega\mu} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} \perp \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{H} \perp \mathbf{E}$$

V/m

$\mathbf{E} \perp \hat{\mathbf{k}}$ より

$$|\mathbf{H}| = \frac{1}{\eta} |\mathbf{E}| = \frac{|A|}{\eta}$$

A/m

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 4\pi\sqrt{8.988 \times 10^2} \cong 120\pi \cong 377 [\Omega]$$

$$\varepsilon = \frac{10^{-9}}{4\pi \times 8.988}$$

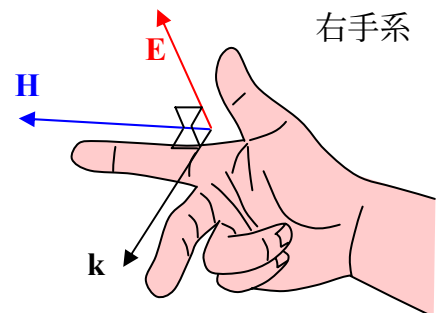
$$\mu = 4\pi \times 10^{-7}$$

外積の関係

$$\mathbf{k} \text{ の向き} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \text{ の向き} = \mathbf{H} \times \mathbf{k} \\ \mathbf{H} \text{ の向き} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} : \text{波動インピーダンス}$$

右手系



$\mathbf{E}$ を $\mathbf{H}$, $\hat{\mathbf{k}}$ で表すと、

$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$ の左側から $\hat{\mathbf{k}}$ との外積を取ると

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E})$$

(ベクトル公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ より)

$$= \frac{1}{\eta} \{ \underbrace{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E})}_{=0} \hat{\mathbf{k}} - \underbrace{(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}})}_{=1} \mathbf{E} \} = -\frac{1}{\eta} \mathbf{E}$$

よって、

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{k}}$$

平面波の波動的、物理的性質

β 方向に速度 $\frac{\omega}{\beta}$ で進む平面波、 $|\beta| = \beta = k$ であるから、

波の速度
$$v_g = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = c \cong 3 \times 10^8 \left[\frac{m}{s} \right]$$

位相速度(phase velocity)
$$v_p = \frac{\omega}{k \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{\cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta}$$

θ方向の

波長(wave length)

位相が 2π 進む距離

$$(\omega t - kr) - \{\omega t - k(r + \Delta r)\} = 2\pi$$

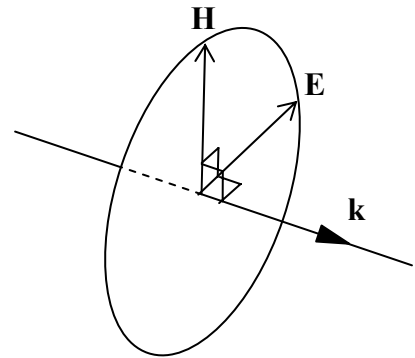
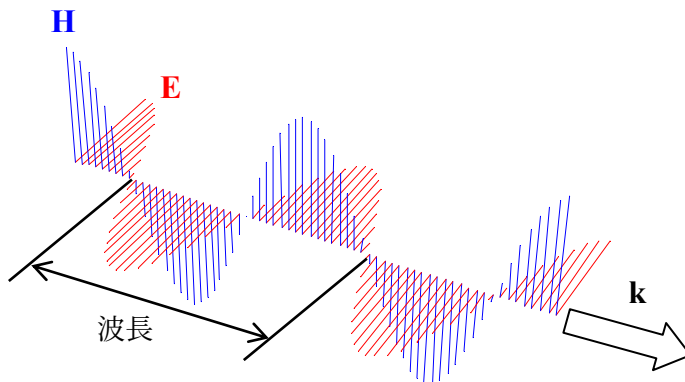
$$k\Delta r = 2\pi$$

$$\lambda \equiv \Delta r = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{f}$$

上の式より、

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

とも書けるので、 $1/\lambda$ は 1[m]あたりの波の数と解釈することもでき、その 2π 倍にはなっているが k は**波数(wave number)**あるいは**位相定数(phase constant)**と呼ばれる。また、 β や $\mathbf{k}$ は波数ベクトルと呼ばれる。



3) 解の形式を仮定せずに、波動方程式を解く。

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

一様性の仮定。

上の3次元バージョンの式を解くのは煩雑なので、ここではx,y方向に界は一様と仮定して1次元問題(xのみの関数)を解く。

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad E_y = E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x + k^2 E_x = 0$$

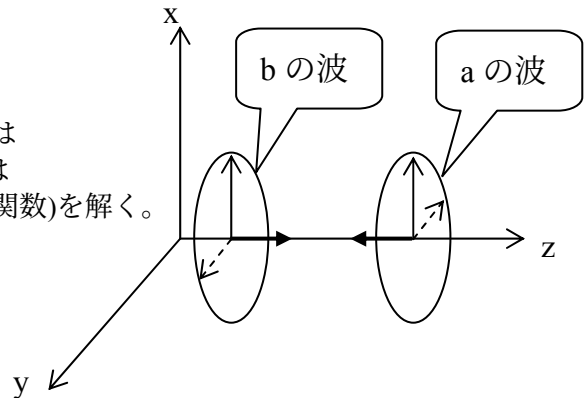
$$E_x = ae^{+jkz} + be^{-jkz}$$

$$E_x e^{j\omega t} = ae^{+jkz+j\omega t} + be^{-jkz+j\omega t}$$

$$= ae^{+j\omega(t+\sqrt{\epsilon\mu}z)} + be^{+j\omega(t-\sqrt{\epsilon\mu}z)}$$

$$= ae^{+j\omega(t+\frac{z}{c})} + be^{+j\omega(t-\frac{z}{c})}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \cong \sqrt{9 \times 10^{16}} = 3 \times 10^8 = 30 \text{ 万 km/sec} \cong 29.98 \text{ 万 km/sec}$$



a, b は z の関数でない任意定数

これをファラデーの法則に代入し、磁界を求める。

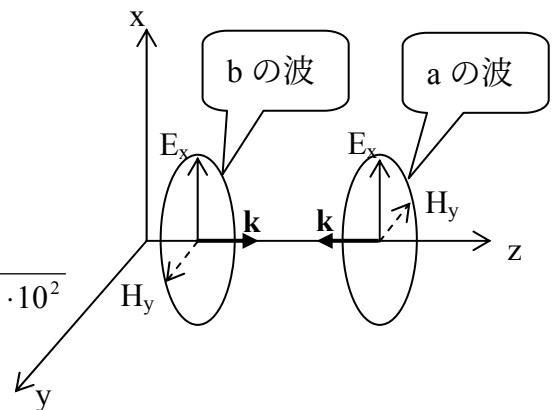
$$\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu} \hat{y} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{j\omega\mu} \hat{y} (jkae^{+jkz} - jkbe^{-jkz})$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{y} (-ae^{+jkz} + be^{-jkz})$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \hat{y} (-ae^{+j\omega(t+\frac{z}{c})} + be^{+j\omega(t-\frac{z}{c})})$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cong \sqrt{9 \times 4\pi \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7}} = \sqrt{3^2 \cdot 4^2 \cdot \pi^2 \cdot 10^2} = 120\pi [\Omega]$$



+z および -z 方向に進行する2つの平面波の合成となる。a と b は条件により決定される係数である。



コーヒー ブレイク (左手系媒質とメタマテリアル)



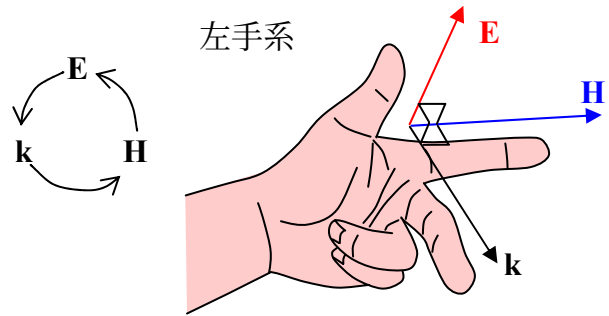
自然界の媒質は $\epsilon > 0$, $\mu > 0$ であるが、もし $\epsilon < 0$, $\mu < 0$ のような媒質があったら、その中を伝搬する電磁波はどのような性質をもつだろうか。

マクスウェルの方程式を次に示す。

$$\begin{cases} \textcircled{1} & \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \textcircled{2} & \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \end{cases}$$

さて、平面波の性質をまとめると

$$\begin{cases} \textcircled{1} & \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{k} \times \mathbf{H}}{\omega\epsilon} \\ \textcircled{2} & \mathbf{H} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega\mu} \end{cases}$$



であった。 $\epsilon < 0$, $\mu < 0$ となった場合には、次のようになる。

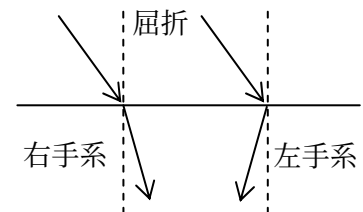
$$\begin{cases} \textcircled{1} & \mathbf{E} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{H}}{\omega|\epsilon|} \\ \textcircled{2} & \mathbf{H} = -\frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega|\mu|} \end{cases}$$

と書き直すと、波数ベクトルは逆方向を向く。 $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$ は左手系になっていると解釈することができる。そして、その場合の Poynting Vector(8.1 節参照)は

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{E} \times \frac{(-\mathbf{k}^*) \times \mathbf{E}^*}{\omega|\mu|} \right\} = -\frac{1}{2\omega|\mu|} \{ \mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*) \}$$

(ベクトル公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ より)

$$= -\frac{|\mathbf{E}|^2}{2\omega|\mu|} \mathbf{k}$$



つまり、エネルギーの進行方向は $-\mathbf{k}$ 方向であり、波数ベクトルと逆向きになっている。波のエネルギーは向こうへ行くのに、波のうねりはこちらへ向かって来るというイメージである。このような媒質を最初に調べたのは Veselago[1]である。プラズマは低周波において等価的に負の誘電率を示すことが考察のきっかけになったものと思われる。左手系媒質は負屈折率を有するのでスネルの法則において θ_i が負になる（光線は手前側に屈折）や右手系媒質と逆のドップラー効果（波源に向かうと観測周波数が下がる）を示すなどの性質がある。

Veselago は左手系媒質の性質を示し、その構成法の提案をしたが、実現には至らなかった。同時期に、微小構造で等価的に媒質定数を模擬する人工誘電体や人工磁性体の研究が行われていた（その後、統一的にメタマテリアルと呼ばれるようになって整理されてきた）。Pendry は金属リングの一部をカットしたスプリットリング共振器を用いた負透磁率媒質を報告[2]し、その後 Smith は金属導体棒を用いた負誘電率媒質と組み合わせて負屈折率の動作を実験的に確認した[3]。また、マイクロ波分野において

は伝送線路による解釈を用いて、CRLH 伝送線路モデルの提案が行われ（複数の研究者が同時期に行われた）、広帯域なメタマテリアルの設計法が発展した[4]。

さらなるメタマテリアルの応用として、無反射でエバネッセント波をも結像しうる屈折率-1の平板レンズ（パーフェクトレンズ）、小型マイクロ波回路、小型アンテナ、クローキングを利用した透明マントの応用などが期待されている。現在ではマイクロ波工学、アンテナ工学、光学など様々な分野で活発に研究が行われている。

参考文献

- [1] V.G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ .", Soviet Physics Uspekhi, vol. 10, no.4, pp.509-514, Feb. 1968.
- [2] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart. "Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 47, no. 11, pp. 2075–1084, Nov. 1999.
- [3] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz. "Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity," Phys. Rev. Lett., vol. 84, no. 18, pp. 4184–4187, May 2000.
- [4] C. Caloz and T. Itoh, Electromagnetic Metamaterials, John Wiley & Sons, 2006.

3.2 定在波(standing wave) (あるいは定常波。進行方向の異なる複数の波の合成波)

電界の定在波

電界の時間波形（虚数部）を考える。

$$E_x = ae^{+jkz+j\omega t} + be^{-jkz+j\omega t} \quad (a, b \text{ は任意定数})$$

$$\text{Im}[E_x e^{j\omega t}] = a \sin(\omega t + kz) + b \sin(\omega t - kz)$$

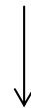
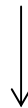
$$= a \sin \omega t \cos kz + a \cos \omega t \sin kz$$

$$+ b \sin \omega t \cos kz - b \cos \omega t \sin kz$$

$$= \underbrace{(a+b) \cos kz}_{A} \sin \omega t + \underbrace{(a-b) \sin kz}_{B} \cos \omega t$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2} \{ \cos \psi \sin \omega t + \sin \psi \cos \omega t \}$$

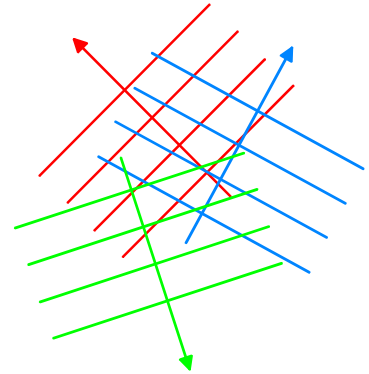
$$= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\psi + \omega t)$$



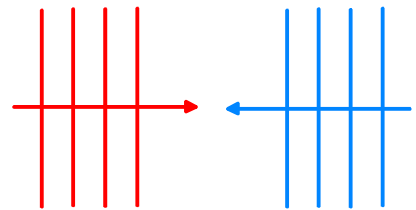
$$\left(\sin \psi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \psi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

場所のみの関数 波

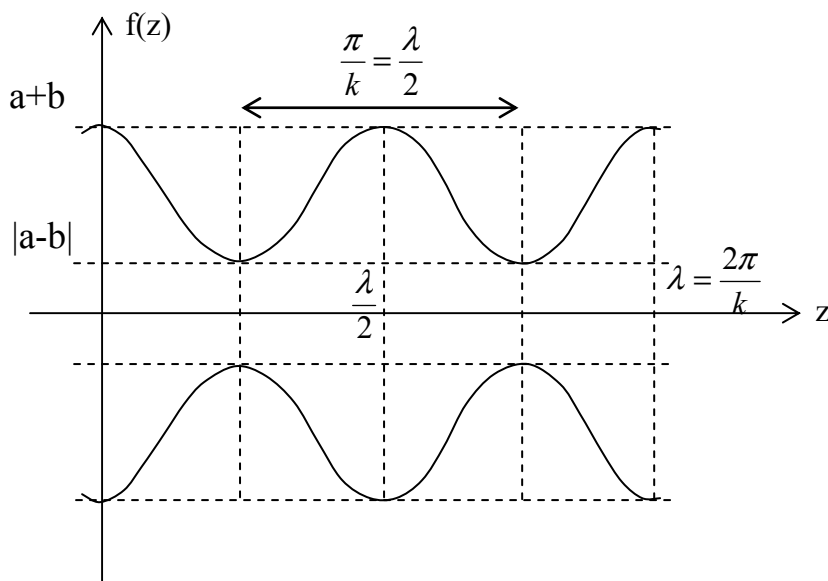
$$= f(z) \sin(\psi + \omega t)$$



±zに進む2つの素波の合成波



$$\begin{aligned} f(z) &= \sqrt{(a+b)^2 \cos^2 kz + (a-b)^2 \sin^2 kz} \quad : \text{振動の包絡線で時間に依らぬ分布} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos^2 kz - 2ab \sin^2 kz} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(2kz)} \end{aligned}$$



磁界の定在波

$$E_x = ae^{+j\omega(t+\frac{z}{c})} + be^{-j\omega(t-\frac{z}{c})}$$

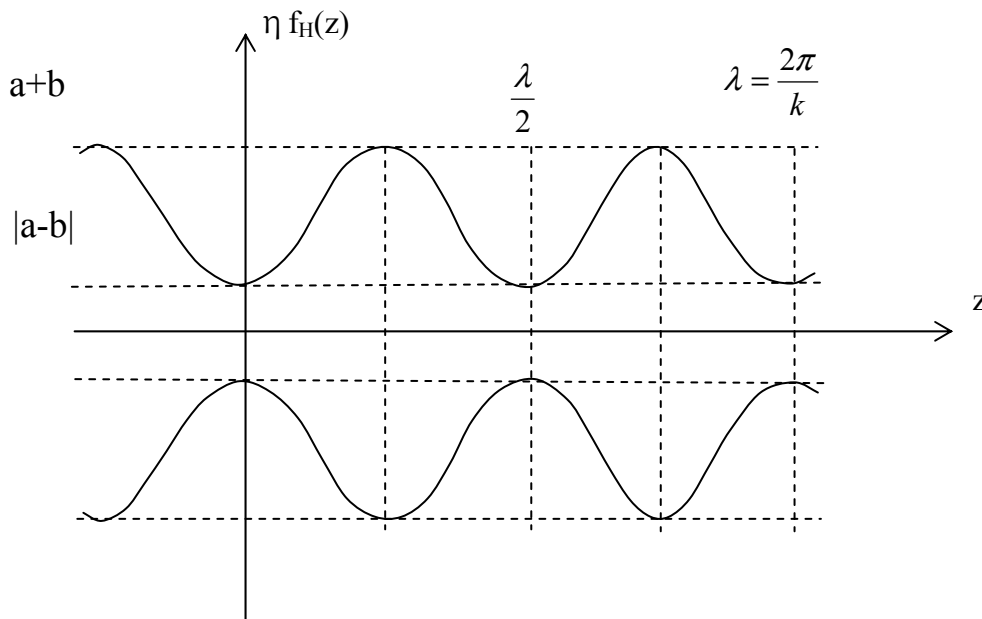
$$H_y = \frac{1}{\eta} \left[-ae^{+j\omega(t+\frac{z}{c})} + be^{-j\omega(t-\frac{z}{c})} \right]$$

$$= \frac{1}{\eta} [-a \sin(\omega t + kz) + b \sin(\omega t - kz)]$$

$$= \frac{1}{\eta} \left[\underbrace{(-a+b) \cos kz}_{C} \sin \omega t + \underbrace{(-a-b) \sin kz}_{D} \cos \omega t \right]$$

$$= \frac{1}{\eta} \sqrt{C^2 + D^2} \sin(\psi + \omega t) \quad \left(\sin \psi = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}}, \cos \psi = \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}} \right)$$

$$\begin{aligned} \eta f_H(z) &= \sqrt{(a-b)^2 \cos^2 kz + (a+b)^2 \sin^2 kz} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos^2 kz + 2ab \sin^2 kz} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(2kz)} \end{aligned}$$



電圧定在波と節腹逆

$$\eta f_H(z) = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(2kz + \pi)}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \left\{ 2k \left(z + \frac{\pi}{2k} \right) \right\}}$$

→ 電圧定在波と節腹逆

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \left\{ 2k \left(z + \frac{\lambda}{4} \right) \right\}} = f \left(z + \frac{\lambda}{4} \right)$$

定在波比 (Voltage Standing Wave Ratio : VSWR)

$$f^2(z) = a^2 + b^2 + 2ab[\cos^2 kz - \sin^2 kz]$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab \cos(2kz)$$

$$\rightarrow \text{山谷 (節腹) の周期: } 2kz = 2\pi, \quad z = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2} \quad (\text{半波長})$$

$$\dot{E}_x = f(z) \sin[\omega t - \tau(z)]$$



包絡線 (時間に依らぬ場所の関数)

定在波比 (VSWR)

a, b ともに正を仮定。

$\frac{a+b}{|a-b|}$ を電圧定在波比(Voltage Standing Wave Ratio: VSWR)という。

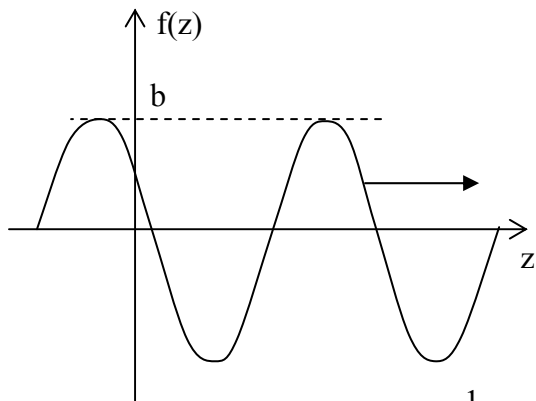
一般の a, b に対しては、 $\frac{|a|+|b|}{\left||a|-|b|\right|}$

VSWR $\neq 1$ の場合：定在波(standing wave)

VSWR=1 の場合：進行波(traveling wave)

I) 進行波 $a=0, b \neq 0$

VSWR=1.0



$$\vec{E}_x = b \cos(\omega t - kz)$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$\frac{2\pi}{k} = \lambda$$

$$\therefore k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{波数})$$

$$c = \lambda \times f = \lambda \times \frac{1}{2\pi}(\omega)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$$

↓

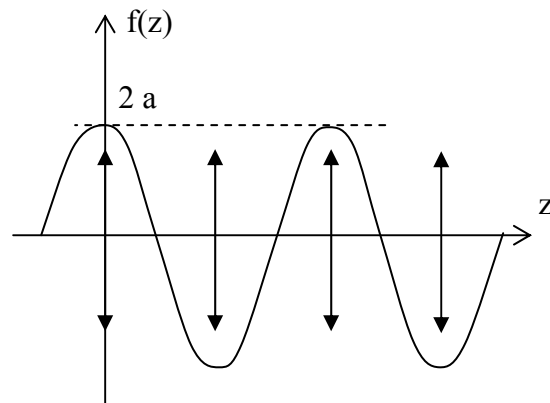
$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}f} = \lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{2\pi}{k}$$

II) 定在波 $a, b \neq 0$ 、特別な例： $a=b$ VSWR $=\infty$

$$f^2(z) = 2a^2(1 + \cos 2kz)$$

$$= a^2 4 \cos^2 kz$$

$$f(z) = 2a \cos kz$$

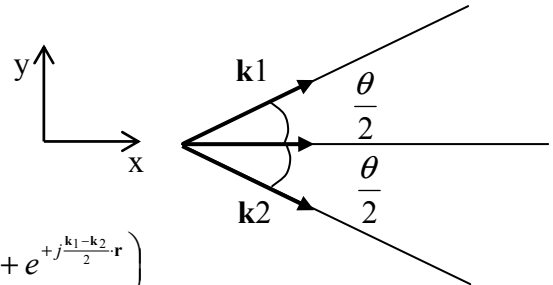


***** 例題 *****

① 角度 θ で交差する2つの平面波に関し、定在波の様子を求めよ。

定在波比、定在波の周期、定在波の山 or 谷、等位相面

$$\begin{aligned} \text{条件} \quad & |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = k \\ & |\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2| = E_0 \end{aligned}$$



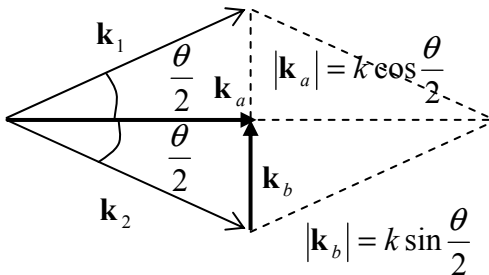
解答

$$\mathbf{E} = E_0 (e^{-j\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}) = E_0 e^{-j\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r}} \left(e^{-j\frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r}} + e^{+j\frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r}} \right)$$

$$= 2E_0 e^{-j\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r}} \cos\left(\frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r}\right)$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{k}_a & \mathbf{k}_b \end{array}$$

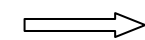
$$\dot{\mathbf{E}} = \text{Re}[\mathbf{E}e^{j\omega t}] = 2E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r}\right) \cos\left(\frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{r}\right) = 2E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}) \cos(\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r})$$



定在波の様子

$$\frac{2\pi}{k \cos \frac{\theta}{2}} = \lambda \times \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

等位相面

山
谷
山
谷
山
谷
山

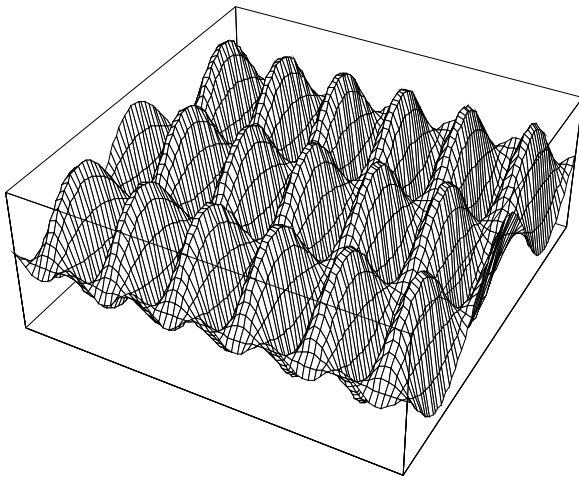
合成波の進行方向

$$\frac{\pi}{k \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\lambda}{2} \times \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

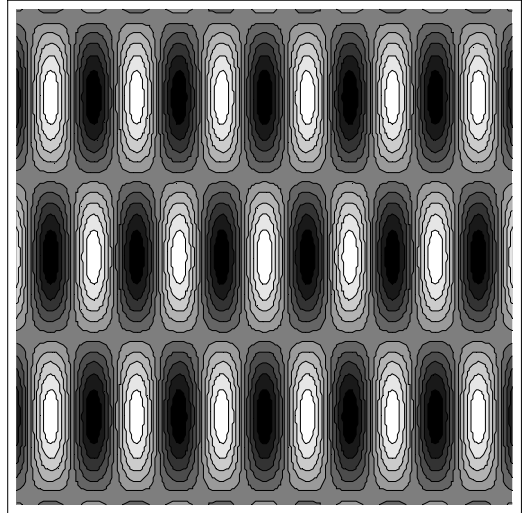
位相速度:

$$\frac{\omega}{|\mathbf{k}_a|} = \frac{\omega}{k \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{c}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

Mathematica を使ってより視覚的に描くと次のようになる($\theta = 30^\circ$ の例)。



3次元グラフ



等高線グラフ

例

① $\theta = 0^\circ$

x 方向間隔: $\frac{2\pi}{k} \rightarrow$ 波長 λ_0

② $\theta = 90^\circ$

x 方向間隔: $\frac{2\sqrt{2}\pi}{k}$

③ $\theta = 180^\circ$

x 方向間隔: ∞

c.f.: <http://www-antenna.ee.titech.ac.jp/~hira/hobby/edu/em/standing/twodim/index-j.html>

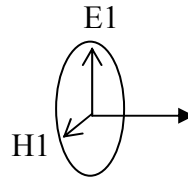
3.3 偏波

$\mathbf{k}$ ($\hat{z}$) 方向に進む 2 つの平面波を考える。

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{A}_1 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

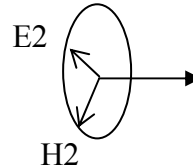
$$|\mathbf{k}| = k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_1$$



$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{A}_2 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_2$$



今、次の場合を考える。

$$\mathbf{A}_1 = a\hat{x}, \quad \mathbf{A}_2 = b\hat{y} \quad (a, b \in \text{実数} \mathbf{R})$$

瞬時値 $\mathbf{e}(t)$ を求めるには、 $e^{j\omega t}$ をかけて実部（あるいは虚部）を採用すれば良い。

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \text{Re}[(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)e^{j\omega t}] = \text{Re}[\mathbf{E}_1 e^{j\omega t}] + \text{Re}[\mathbf{E}_2 e^{j\omega t}] \\ &= a \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \hat{x} - b \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \hat{y} \\ &= a \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \hat{x} + b \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + 90^\circ) \hat{y} \end{aligned}$$

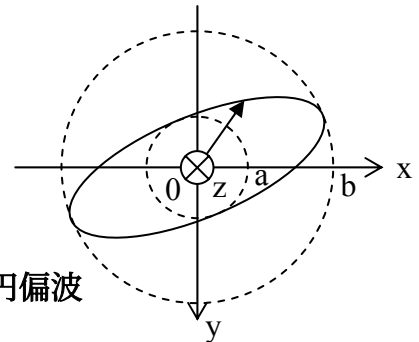
したがって、進行方向に向かってその方向に垂直な面上での、電界ベクトルの瞬時値の軌跡を求めると。

$$x = a \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad y = -b \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{と} \quad \text{おいて、}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{楕円の方程式}$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x} = -\left(\frac{b}{a}\right) \tan(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

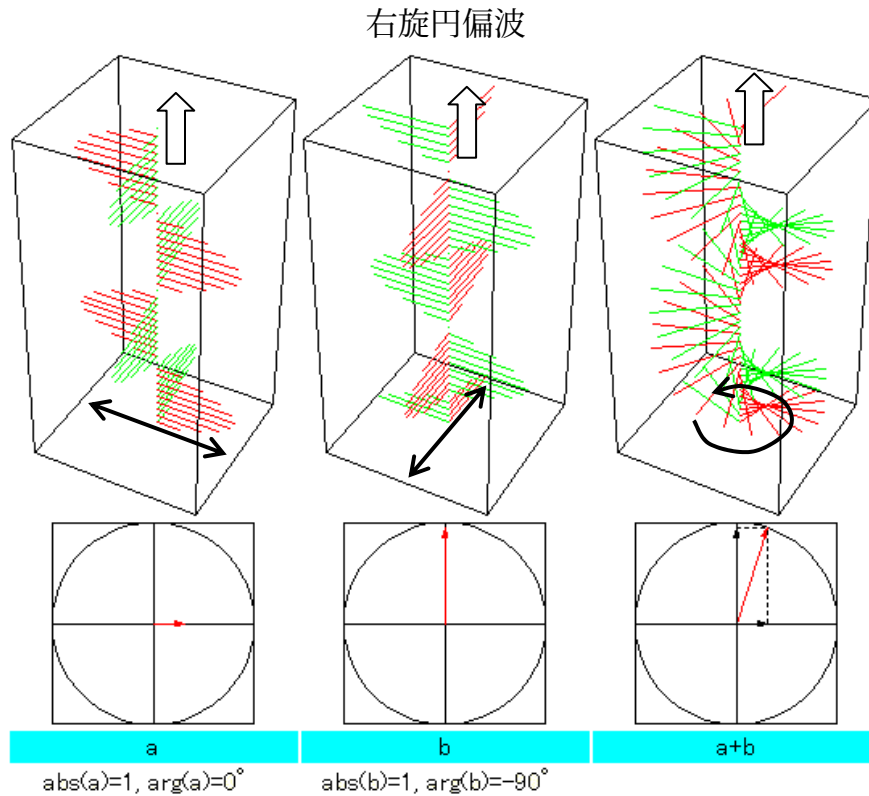
のように楕円となる。回転角は時間に比例しない。**楕円偏波**



a と b との比 ($\max(|a/b|, |b/a|) \geq 1$) を**軸比**という。

a, b ともに正またはともに負とすると、場所を止めて電磁波の進行方向(+ z 方向)を見たとき、時間とともに左向きに回転する（左旋偏波）。もし a, b が異符号であれば、右回りに回転する（右旋偏波）。

また $|a| = |b|$ であれば、**円偏波**という。さらに、 $|a/b|$ が 0 か無限である場合、軌跡は $x = 0$ あるいは $y = 0$ の直線となり、**直線偏波**となる。より一般には a, b は複素であり (x 成分と y 成分との位相差は 90° とは限らず)、電界ベクトルの軌跡は傾いた楕円となる。



c.f.: <http://www-antenna.ee.titech.ac.jp/~hira/hobby/edu/em/polarization/index-j.html>

電界と磁界は互いに直角なベクトルであって、進行方向に直角な面内に存在している。2次元のベクトルには、2つの独立な成分があり、独立な通信を行うことができる。電界ベクトルの向きを、偏波という。テレビは水平偏波、ラジオは垂直偏波、携帯電話は垂直偏波、衛星放送は円偏波、GPSは円偏波など。

