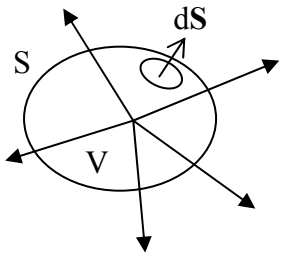
2．ベクトル演算子の公式と Maxwell の方程式の微分形

勾配(grad, ∇)、発散(div, ∇·)、回転(curl, rot, ∇×)の実際の表現は付録 A.7 参照

$$\oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dv$$ 発散定理

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$ ストークスの定理



発散定理

Maxwell の方程式（微分形）

ガウスの法則

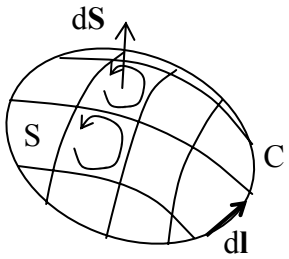
$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \sum Q = \iiint_V \rho\, dV$$ 単位　Q[C]

これに発散定理を適用する。

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{D}dV = \iiint_V \rho dV$$

したがって、V(S)の取り方は任意なので

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$$ [C/m^3]



磁束に対するガウスの法則

$$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{B}dV = \sum M = \iiint_V m dV = 0$$ M [Wb]

したがって、V(S)の取り方は任意なので

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$ [Wb/m^3]

ストークスの定理

アンペアの法則

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\mathbf{i}+\mathbf{i}_d)\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{i}\cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

ストークスの定理を適用する。

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla\times\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{i}\cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

したがって、S(C)の取り方は任意なので

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

ファラデーの法則

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

ストークスの定理を適用する。

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla\times\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

したがって、S(C)の取り方は任意なので

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

これらをまとめて以下の微分形を得る。

$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{i}+\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$　　アンペアの法則 (Ampere's Law)　　(1)

$\nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$　　ファラデーの法則 (Faraday's Law)　　(2)

$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$　　電荷ガウスの法則 (Gauss' Law)　　(3)

$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$　　磁荷ガウスの法則 (Gauss' Law)　　(4)

$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$　　成分方程式

$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$　　成分方程式　　(5)

ところで$\nabla\cdot$(1) より

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{H})=\nabla\cdot\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{D}=\nabla\cdot\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial t}\rho=0$$

$\nabla\cdot\mathbf{i}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\rho$　　電流連続の方程式　　(6)

（電流連続の方程式が成り立つようにアンペアの法則を修正したので、導かれるのは当然である）

全てが必要ではない。

$(2)\rightarrow(4)$　　導出可　　$(1),(3)\rightarrow(6)$　　導出可
$(1),(6)\rightarrow(3)$

Time-harmonic (正弦波)　　$\dfrac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\Rightarrow \mathrm{j}\omega$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{i}+j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$
$$\nabla\times\mathbf{E}=-j\omega\mu\mathbf{H}$$
$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon},\ \nabla\cdot\mathbf{H}=0,\ \nabla\cdot\mathbf{i}+j\omega\rho=0$$

$\mathbf{i}=0$ の時($\nabla\cdot\mathbf{i}=-j\omega\rho=0\ \Rightarrow\ \rho=0$)

$\nabla\times\mathbf{H}=j\omega\varepsilon\mathbf{E}$　　$\nabla\times\nabla\times\mathbf{H}=k^2\mathbf{H}$

$\nabla\times\mathbf{E}=-j\omega\mu\mathbf{H}$　　$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=k^2\mathbf{E}$

$$k^2=\omega^2\varepsilon\mu$$

$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}=k^2\mathbf{E}$　　$\nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0$

↑　　Vector Helmholtz Eq.

Vector Laplacian

複素誘電率

ところで導体中では、電流が近似的に電界に比例する。

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \qquad \sigma \text{：導電率}$$

これをアンペアの法則に代入する。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{i} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} \\ &= \sigma\mathbf{E} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} \\ &= j\omega\dot{\varepsilon}\mathbf{E} \end{aligned}$$

$$\dot{\varepsilon} = \left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right) \quad \text{複素誘電率}$$

つまり、誘電率を複素数と考えることにより、あたかも真電流がない場合と同様に扱うことができる。

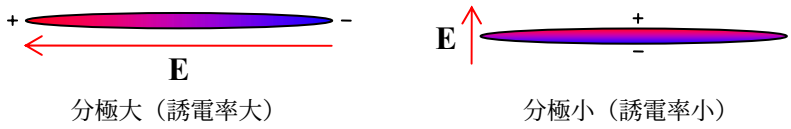
Maxwell の方程式のまとめと媒質の性質による分類

	積分形	微分形
ファラデーの法則	$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$	$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}$
アンペアの法則	$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i}\cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{d\mathbf{D}}{dt}\cdot d\mathbf{S}$	$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$
電荷ガウスの法則	$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV$	$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$
磁荷ガウスの法則	$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$
成分方程式	$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ (等方性媒質), $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}\mathbf{E}$ (異方性媒質)	
成分方程式	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ (等方性媒質), $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}\mathbf{H}$ (異方性媒質)	

●物性について（波動工学の範囲外）

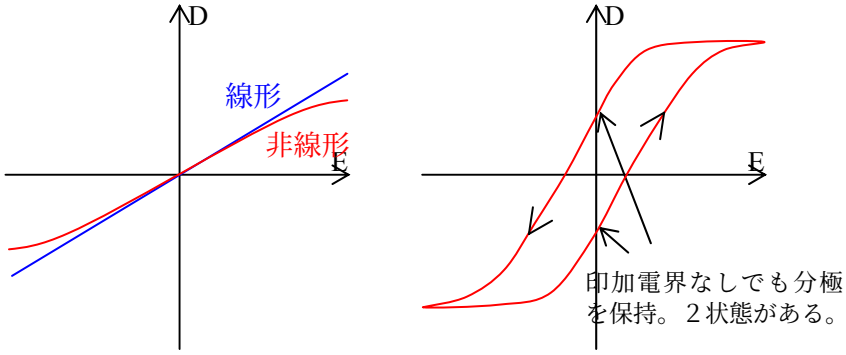
ところで、$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ のようにスカラーの ε を用いて表される媒質を**等方性媒質(isotropic media)**と言う。これは誘電体などの分極が外部からかける電界の方向に依らないものである。しかし、実際には物質は原子や分子から出来ており、ミクロに原子を眺めて電子の軌道や結晶構造を考慮すると、外からかける電界の向きによって電子の分極の仕方が異なることがある。そのような媒質を**異方性媒質(anisotropic media)**と言い、誘電率や透磁率はスカラーで表現することができず、上の表のように一般には行列 $[\varepsilon]$, $[\mu]$ で表現することになる。上の行列表現のようにすると、例えば x 方向に電界をかけたときに y 方向に分極する場合でも ε_{yx} を用いて表現されている。この行列表現は**テンソル(Tensor)**と呼ばれ、異方性を表現するのに便利である。異方性は媒質の方向依存特性である。異方性媒質は非常に多くあるが、例えば、磁化フェライト、磁化プラズマ（プラズマとは気体をさらに高温にして原子がイオンと電子に分離した状態である。マクロに見ると電気的には中性だが、荷電粒子が飛び交っている状態である）、方解石などは異方性媒質の例である。磁化フェライトはその異方性を積極的に利用して、電磁波を１方向だけに通し、逆方向から来た電磁波は減衰させて熱にしてしまうアイソレータ（方向性結合器）や無線通信の送受信を同時に行えるようにするサーキュレータなどに用いられている。液晶などの細長い分子も異方性である。偏光板もこの性質を利用している。

細長い分子の分極



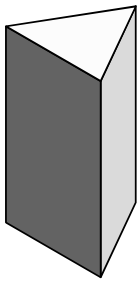
分極大（誘電率大）　　分極小（誘電率小）

また、電力が小さいときは一般に媒質定数$[\varepsilon]$, $[\mu]$は定数であり、マクスウェルの方程式は**線形(linear)**となる。しかし、現実の媒質では$[\varepsilon]$, $[\mu]$は**E**, **H**の大きさの関数となる。なぜならば、例えば分子内部の電子の分極や、分子配置の変化（配向分極）などは**E**の大きさが十分大きくなると、それ以上分極が進むことが出来ずに飽和する。このように大電力を扱う場合には一般に媒質定数$[\varepsilon]$, $[\mu]$が電力の関数となり、**非線形(non-linear)**となる。線形性は媒質の電力特性である。例えば、プラズマなどは大きな電力を投入するほど荷電粒子が多くなり、媒質定数が電力の関数となる。非線形の場合にはさらに**履歴現象(ヒステリシス, hysteresis)**を有するものもある。例えば、鉄などのような磁性体で、H-B 特性が１本の線上にのらないものである。磁化させたら外部磁界を取り除いてもその状態を保とうとする媒質が履歴現象を示す。この特性を積極的に利用すると磁気テープやハードディスクなどの記憶媒体を作ることができる。また、最近では強誘電体（外部電界を取り除いても分極を保持する媒質）を用いた不揮発性メモリー（電源を切ってもデータが消えないメモリー）FeRAM, FRAM の研究が盛んに行われている。

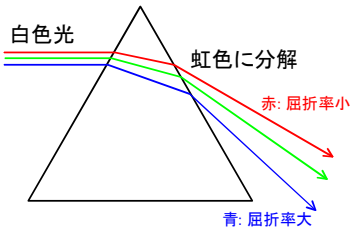


もう一つ、媒質を特徴づけるパラメータとして、媒質の周波数特性がある。一般には媒質定数$[\varepsilon]$, $[\mu]$は周波数によって値が変わる。その理由は媒質もミクロに見ると原子や分子から出来ていることを考え、また、電子は原子核にバネを介して束縛された質量のある粒子というモデルを考えると（厳密には量子力学が教えるように、シュレーディンガー方程式に支配される波動関数という存在確率）、周波数によって分極が異なり誘電率が変わることがわかるだろう。周波数によらず一定の媒質定数を持つ媒質を**非分散性媒質(non-dispersive media)**と言い、媒質定数が周波数によって変わる媒質を**分散性媒質(dispersive media)**と言う。「分散」という言葉は、媒質定数が周波数特性を持つ場合、例えば矩形パルス状の電磁波がその媒質中を伝播した場合、波形が崩れる（分散する）ことから来ている。非分散性媒質中では波形の形はいくら伝播しても崩れない。分散性媒質の例としては、光のプリズムがよい例である。白色の太陽光をプリズムに入射させると、虹色の光に分かれるが、これはプリズムの屈折率が周波数によって異なるために混ざっていた様々な波長の光が波長ごとに分離される

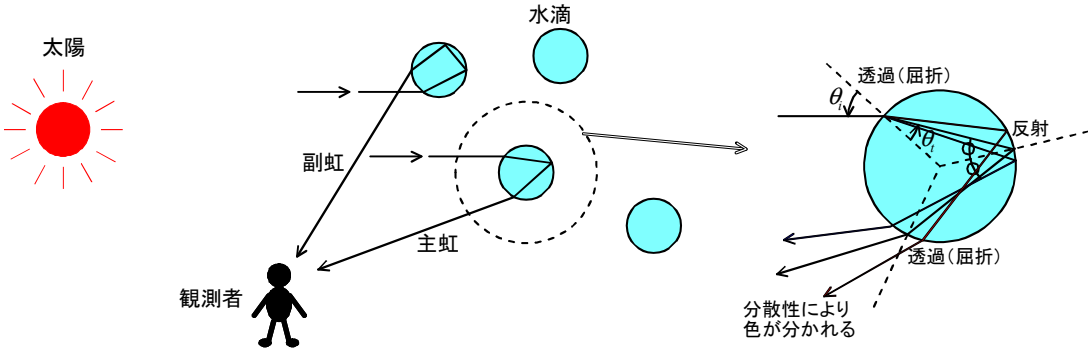
のである。他の分散性媒質の例としては、大気を包んでいる電離層プラズマがある（プラズマは特に分散性の大きな媒質である）。電離層プラズマはある特定の周波数帯だけの電波を通過させ、それ以外の周波数の電波は遮断する特性がある。その特性から、衛星放送や人工衛星との通信に使う周波数が決まっているのである。X バンド(付録 A.2)がその周波数帯域である。他にも、水(H_2O)は 2.45GHz 付近（ピークは 20GHz 付近）の電磁波を熱としてよく吸収する特性がある。このため、2.45GHz のマイクロ波が電子レンジに応用されている（実際は、高出力マイクロ波を得るためのマグネトロンが第二次世界大戦中のレーダー開発で発達したから）。



プリズム



プリズムによる波長ごとの分解



********** 例題 **********

導体内の電荷の消滅

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + j\omega\mathbf{D} = \mathbf{i} + j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\mathbf{i} = \sigma\mathbf{E}$$

σ ：導電率

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + j\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

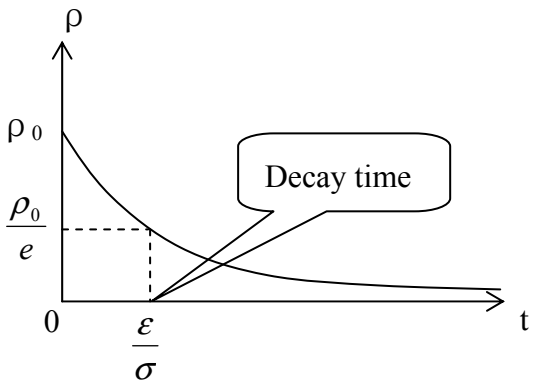
$$= \sigma\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\mathbf{E}$$

上式に∇·を演算。

$$0 = \left(\sigma + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla \cdot \mathbf{E}$$

$$= \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla \cdot \mathbf{D}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho = 0$$



これを解いて、

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

銅の導電率、誘電率(付録 A.1, A.3)を代入すると、電荷が $1/e$ となる時間が求まる。

$$\begin{cases} \mu = 4\pi \times 10^{-7} \\ \varepsilon \cong \dfrac{1}{9 \times 4\pi} \times 10^{-9} \cong 8.854 \times 10^{-12} \end{cases}$$

Decay time　$\dfrac{\varepsilon}{\sigma} = \dfrac{8.854 \times 10^{-12}}{5.8 \times 10^{7}} \cong 1.53 \times 10^{-19}$ 秒

この時間を光の周波数の 1 周期と比較する。　30 万 km/波長＝周波数

波長から周波数を求めると、$0.7\mu m \rightarrow 0.7 \times 10^{-6} m \rightarrow f = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3 \times 10^{8}}{0.7 \times 10^{-6}} \cong 4 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}$

導体中の電荷は光の周期の 10^{-3} の時間で消滅する。　導体中に電荷は存在しない。

****

****
（演習問題）
****