

電磁波発展の歴史

年代	分野		
	電気	磁気	光
紀元前 7 世紀		天然磁石の発見	
紀元前 6 世紀	ターレス(ギリシア)が琥珀をこすると物を引き付ける(静電気)ことを発見		
紀元前 3 世紀		中国で指南車(羅針盤)の発明	
300B.C.			ユークリッド(ギリシア)が光の直進性、反射の法則を発見
13 世紀		ヨーロッパに磁気羅針盤(コンパス)が伝わる	
1269A.D.		ペレグリヌス(フランス)による磁石の極の記述	
1600		ギルバート(イギリス)が磁石の性質を研究。地球が磁石であることを発見	
1620			スネル(オランダ)がスネルの法則(光の屈折の法則)を発見
1660			フェルマー(フランス)がフェルマーの原理(光の反射・屈折の法則)を発見
1666			ニュートン(イギリス)による光の分散(プリズム)の発見
1675			レーマー(デンマーク)が木星の衛星の観測による光速測定をする
1678			ホイヘンス(オランダ)が光の波動説を提唱
1745	クライスト(ドイツ)がライデン瓶を発明		
1746	ミュセンブルク(オランダ)ライデン瓶を発明		

1752	フランクリン(アメリカ)が雷の正体は電気であることを発見		
1780	ガルバーニ(イタリア)が動物電気(死んだカエルの足に電気を流すと動く)を発見		
1785	クーロン(フランス)がクーロンの法則を発見		
1799	ボルタ(イタリア)がボルタ電池を発明		
1808			マリユス(フランス)が反射による偏光(偏光角=ブリュースター角と関連)現象を発見
1815			ブリュースター(イギリス)が偏光角の法則を発見
1816-1819			フレネル(フランス)が光の回折、偏光の波動論を研究
1820	エルステッド(デンマーク)が電流の磁気作用を発見		
1820	アンペール(フランス)がアンペールの法則を発見		
1820	ビオ(フランス)とサバール(フランス)がビオ・サバールの法則(微小電流素が作る磁界)を発見		
1823			フレネル(フランス)がフレネルの公式(反射・透過係数の振幅を与える公式)を発見
1826	オーム(ドイツ)がオームの法則を発見		
1831	ファラデー(イギリス)がファラデーの法則(電磁誘導の法則)を発見、コンデンサの研究を行う		
1832	ヘンリー(アメリカ)が自己誘導を発見(インダクタンスの導入)		
1834	レンツ(ロシア)がレンツの法則を発見		
1836	ダニエル(イギリス)がダニエル電池を発明		
1837	ファラデー(イギリス)が電気の近接作用論を提唱		
1845		ファラデー(イギリス)がファラデー効果(磁気旋光効果)、反磁性を発見	
1849			フィゾー(フランス)が回転歯車による光速の測定
1855	フーコー(フランス)が渦電流を発見		

1859	プランテ(フランス)が蓄電池を発明		
1860	キルヒホッフ(ドイツ)がキルヒホッフの法則を発見		
1864	マクスウェル(イギリス)がマクスウェルの方程式を発見(提唱)、電磁波の存在を予言、光の電磁波説を提唱		
1870	ヘルムホルツ(ドイツ)が電磁波の境界条件を導出		
1871			レイリー(イギリス)が分子振動子の観点から太陽光の散乱を研究(レイリー散乱)
1875	ローレンツ(オランダ)がマクスウェルの方程式、境界条件からフレネルの公式を導出		
1875	カー(イギリス)がカー効果(電気光学効果)を発見		(カー効果は光にも関係)
1879			エジソンが白熱電球の特許を申請
1882	エジソン(アメリカ)がニューヨークに直流発電所を作る		
1887			マイケルソン(アメリカ)とモーリー(アメリカ)がマイケルソン・モーリーの実験を行う(光波の媒質となるエーテルは存在しないことを実験で確認) →光は波動ではない! ?この時点では説明不能
1887			ヘルツ(ドイツ)が光電効果を発見 →この時点では説明不能
1888	ヘルツ(ドイツ)がマクスウェルが予言した電磁波の存在を実験で確認		
1895	ローレンツ(オランダ)が運動物体の電磁工学理論(ローレンツ力)を研究		
1895	レントゲン(ドイツ)がX線を発見		
1897	トムソン(イギリス)が電子の存在を実験で確認		
1897	マルコーニ(イタリア)が無線電信(イギリス-フランス間)に成功		
1901	マルコーニ(イタリア)が無線電信(イギリス-アメリカ間)に成功		
1905	アインシュタイン(ドイツ)が特殊相対性理論を発見(提唱)		
1905	アインシュタイン(ドイツ)が光量子仮説を発見(提唱) →電磁波の波動と粒子の二重性。マイケルソン・モーリーの実験、光電効果が説明可能		

自然科学分野における電磁波発見の歴史について説明する。上の表に電磁波発展の歴史を示す。電磁波とは電気現象と磁気現象が互いに関連しあう現象である。また、光は電磁波の一部であり、電磁波そのものであるが、人間の目で見えるため、その性質の考察は電磁波全容の解明とは独立して、それ以前から進められていた。以下では重要なものを取りあげて説明する。

紀元前7世紀頃、古代ギリシアの植民地の小アジア西岸、イオニア地方のマグネシアで天然磁石が産出されたと言われ、これより磁石はマグネットと呼ばれるようになったそうである。

紀元前6世紀頃、ギリシアのターレスにより、琥珀をこすると物を引き付ける作用がある（静電気）ことが発見される。自然界には天然磁石が存在するため、電気現象よりも磁気現象の考察・研究が進んだ。また、光も目に見えるため直進性、反射の法則などは紀元前から知られていた。

それから中世ヨーロッパでは磁力には魔術的、呪術的な色彩がまわりついていたが、13世紀になるとヨーロッパに磁気羅針盤が伝わり、風車や水車などの使用による産業革命（現代からするときわめて緩やかであるが）による余剰と都市化により経済的余裕ができ、再び学術の発展が始まる。ペレグリヌスは最初の実験物理学の論文とも言うべき「磁気書簡」を著している。

1600年以前にも磁気羅針盤は実用化されていたが、1600年頃にギルバートが地球が磁石だと気づいたというのは、1522年にマゼラン（ポルトガル）が達成した世界一周の航海により、地球は丸いということを知っていたからだと思われる。

その後、1600年代は光に関する研究が盛んになり、スネルの法則（光の屈折の法則）、フェルマーの原理（光の反射・屈折の法則）、光速などの実験による経験則が得られる。しかし、これらはあくまで経験則であり、微視的にはどのような原理でそうになっているのかはまだわかっていない。この解明は後の1864年のマクスウェルの方程式の登場を待たなければならない。また、1687年にはニュートンが運動の法則と万有引力の法則を発見し、古典力学の基本法則が見出されていった。

1700年代に入ると、ライデン瓶の発明で電気を蓄えることができるようになり、電気力の研究が進んだ。電荷間の力は距離の逆2乗に比例するというクーロンの法則も発見される。

1800年代になると再び光の研究が進み、ヤングが行った光の干渉の実験から光は波

動であると考えられた。また、偏光角（ブリュースター角）や反射・透過係数の振幅を与えるフレネルの公式も発見された。これらもまだ実験による経験則であり、原理の詳細な説明はマクスウェルの方程式の登場を待つことになる。さらに、1799年のボルタ電池の発明により、直流電流を流すことが可能になり、電流（電荷の流れ）と磁気の関係が発見される。それまでは無関係な現象だと考えられていた電気と磁気がつながったことは大きな進展である。無限長電流が作る磁界を求めるアンペールの法則や、微小電流素が作る磁界を求めるビオ・サバールの法則も発見された。安定した電池が使えるようになったので、電気回路も発達し、オームの法則やキルヒホッフの法則も発見された。時間的に変化する磁界と電流の関係も調べられ、ファラデーの法則（電磁誘導の法則）や自己誘導の法則が発見された。またファラデーはコンデンサについても研究を行い、交流理論の基本素子である抵抗 R 、インダクタンス L 、キャパシタンス C が全てそろった。

ファラデーが提唱した近接作用論も大きな影響を与えている。電荷間の力は直接に及ぼし合う（この考え方を遠隔作用と言う）のではなく、空間の性質を変化させ、それが広がっていったお互いに力が及ぼされるという考えである。近接作用論から電界という考え方が生まれた。さらにファラデーは 1845 年に、ある媒質に磁界を印加すると偏光面が回転するファラデー効果を発見し、磁気と光もなんらかの関係があるらしいことを発見した。

電気、磁気、光は全て関連しそうなことがわかった。1864年にマクスウェルは電磁波発展の歴史の中で非常に重要な仕事を行った。コンデンサ内部の電束密度 D の時間変化は電流 I と同じ働きをする（変位電流）と考えて、アンペールの法則に変位電流も組み込んだ。アンペールの法則は「電束密度 D の時間変化は周囲に磁界 H の渦を作る」と言い換えることもできる。これは、「磁束密度 B の時間変化は周囲に電界 E の渦を作る」と言うファラデーの法則と同じ形をしており、電気(電界 E 、電束密度 D)と磁気(磁界 H 、磁束密度 B)は互いに対称な形で結ばれた。しかも、この方程式を解くと、電界、磁界ともに光速の波動となって伝搬するという結果が得られる。これが電磁波と呼ばれるものである。さらに驚くべきことは、電気、磁気の問題が繋がっただけでなく、偶然にも（偶然ではないのだが）電磁波の速度は光速と一致するのである。そこで、マクスウェルは光は電磁波であると予想したのである。この2つのこと、つまり「電磁波の存在」と「光の電磁波説」は一見矛盾なく今までの理論体系に溶け込むように見えるが、まだ数式から導いた思考実験の段階であり、現実世界を対象とする科学では実験によって確認しなければならない。電磁波の存在の確認は 1888 年のヘルツの実験を待つことになる。

1870 年にはヘルムホルツが電磁波の境界条件を導出した。1875 年にはローレンツがマクスウェルの方程式とヘルムホルツが導出した境界条件を用いて光の法則であ

るフレネルの公式（1823 年にフレネルが発見）を数式から導いた。当時、マクスウェルの理論の同調者は少なかったが、マクスウェルの方程式から光速だけでなく、フレネルの公式も得られることで、「光の電磁波説」の信頼性は高まった。

1888 年にヘルツはマクスウェルが予言した電磁波の存在を証明するために実験を行い、電磁波の存在が実験により確認された。ヘルツは実験のみならず理論も得意であり、微小ダイポールが放射する電気力線を著書に描き残している。

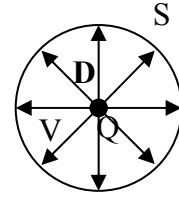
ヘルツの実験装置を改良し、1897 年にはマルコーニがイギリス-フランス間の無線電信に成功、続いて 1901 年にイギリス-アメリカ間の無線電信に成功して無線通信時代の幕開けとなった。

このように、古典力学、電磁気学、電磁波と発展してきたが、電磁波の理論が確立する頃には、相対性理論や量子論への道が開けていく時代の流れがわかるのが面白い。また、電磁波発見の歴史とともに世界史を眺めると、当然ながら人類社会の発展との関連が見られ、非常に興味深い。

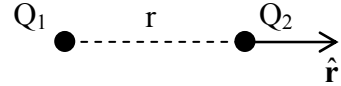
0. 電磁気学の復習

電束に関するガウスの法則

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum Q = \iiint_V \rho dV \quad \text{単位} \quad \begin{array}{l} Q[\text{C}] \\ D[\text{C}/\text{m}^2] \\ \rho[\text{C}/\text{m}^3] \end{array}$$

クーロンの法則(Q_2 の場所において Q_2 が受ける力)

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad [\text{N}]$$



電界の定義

$$\mathbf{F} = Q_2 \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{Q_1 \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad [\text{N}/\text{C}]$$

電界と電束密度、誘電率

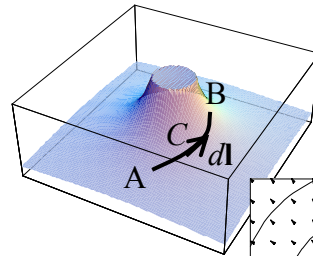
$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon \quad [\text{C}/\text{m}^2 \cdot \text{C}/\text{N}] = \frac{(J/V)^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} = J/V^2 \cdot \text{m} = \text{C}/\text{Vm} = F/\text{m}$$

保存場

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{時間変化がある場合は不成立} \rightarrow \text{ファラデーの法則})$$

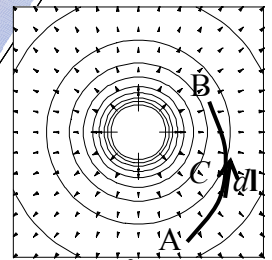
ポテンシャル

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V, \quad \text{Potential : } V \quad [\text{V}]$$



電位、電位差、電圧

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B -\text{grad } V \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B -dV = V_A - V_B \quad [\text{V}]$$



磁束密度に対するガウスの法則(磁荷の存在を仮定)

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \sum M = \iiint_V m dV \quad M [\text{Wb}], \quad m [\text{Wb}/\text{m}^3], \quad \mathbf{B} [\text{Wb}/\text{m}^2]$$

磁荷に対するクーロンの法則 (仮想)

$$\mathbf{F} = \frac{M_1 M_2}{4\pi \mu_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad [\text{N}]$$

磁界

$$\mathbf{F} = M_2 \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{M_1}{4\pi \mu_0 r} \hat{\mathbf{r}} \quad [\text{N}/\text{Wb}]$$

磁界と磁束密度、透磁率

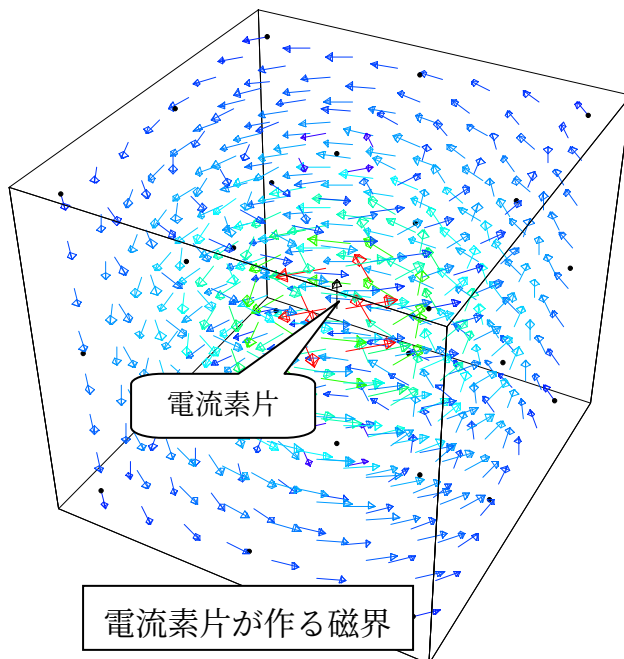
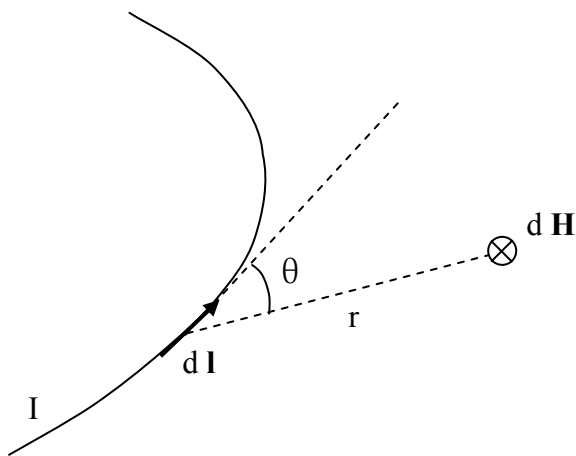
$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mu \left[\frac{\text{wb}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{wb}}{\text{N}} \right] = \frac{\text{wb}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{A}} = \frac{\text{wb}}{\text{m} \cdot \text{A}} = \left[\frac{\text{H}}{\text{m}} \right]$$

静磁界に対するアンペアの法則

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}$$

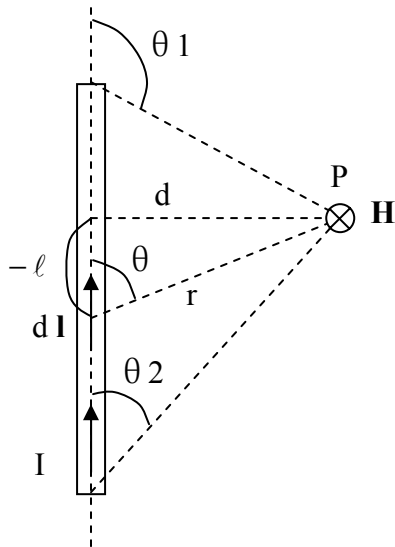
ビオ・サバールの法則

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$$



*****例題*****

ビオ・サバールの法則を用いて、有限長の電流により P 点に作られる磁界を計算する。



$$dH_{\otimes} = \frac{dl I \sin \theta}{4\pi r^2}$$

$$-l \tan \theta = d$$

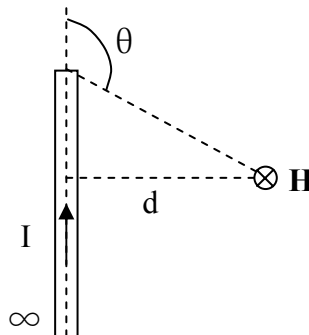
$$r \sin \theta = d$$

$$d\ell = \left[\frac{-d \cos \theta}{\sin \theta} \right]' d\theta = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} d \cdot d\theta = \frac{d}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$dH = \frac{I \sin \theta}{4\pi r^2} \frac{d}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{I \sin \theta}{4\pi d} d\theta$$

$$H = \int_{\theta_2}^{\theta_1} dH = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{I \sin \theta}{4\pi d} d\theta = \frac{I}{4\pi d} [\cos \theta_2 - \cos \theta_1]$$

半無限長の電流の場合 $\theta_1 \rightarrow \theta$, $\theta_2 \rightarrow 0$, $\mathbf{H}_{\otimes} = \frac{I}{4\pi d} [1 - \cos \theta]$

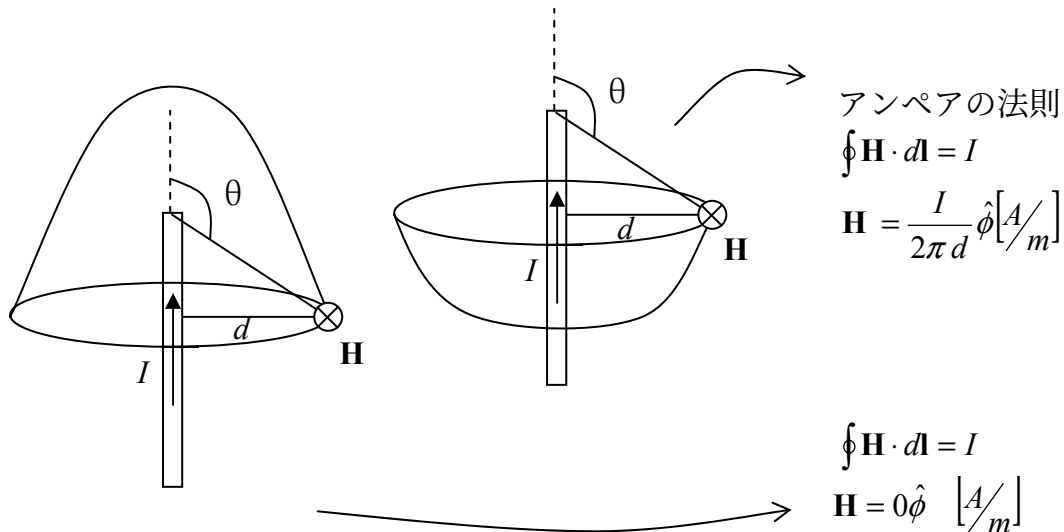


1. Maxwell の方程式

変位電流とは

*****パラドックス 1 *****

前の例題ではビオ・サバールの法則を用いて有限長の電流から作られる磁界を計算したが、今度は電磁気学（静磁気）で習うアンペアの法則を用いて磁界を計算する。



面積の取り方で答えが分かれるし、ビオ・サバールの解と異なるが、どこにパラドックスがあるのだろうか？

正解は、 $\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi d} (1 - \cos \theta) \hat{\phi} \left[\frac{A}{m} \right]$

問題；アンペアの法則を使うと面積の取り方で答えが分かれる？？

いずれの答えもビオ・サバールの解と異なり誤り？？

アンペアの法則＜＜ビオ・サバールの法則？？

原因；直流、電流が不連続、電荷が貯まる。静的（空間内の至る場所のフィールドが時間に依らず変わらない）であり得ない→直流電流を流したら有限長導体の端部に蓄積電荷がたまり、時間的に変化する電界を発生させる。

●変位電流とは

上のパラドックス1のアンペアの法則を用いた磁界の計算では、面の取り方により、面を貫く電流が変化して解が一意に定まらない矛盾があった。しかし、有限長導体棒の端部では蓄積電荷があり、電流と電荷は至る場所で連続の方程式 $I(t) = -\frac{\partial \rho(t)}{\partial t}$ の関

係が成り立つことを考慮すると、 $I(t) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0$ であり、

$$\begin{cases} I(t) = \oint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} \\ \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \end{cases} \longrightarrow S$$

なので、 $\oint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = 0$ つまり、

$$\oint_S \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

となる。この閉曲面 S を曲線 C によって2つの曲面 S_1, S_2 に分けてみよう。

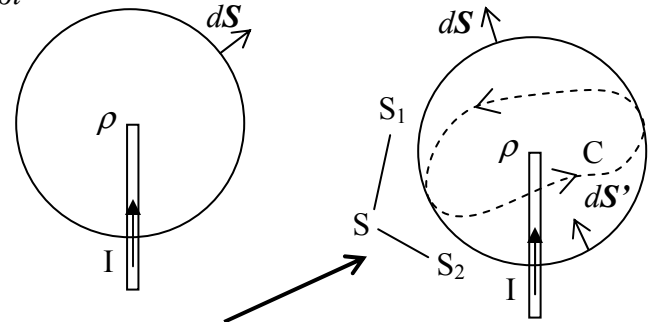
$$\iint_{S_1} \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

C の向きに右ネジを回したときに進む方向から見たとき見える面を面の表側と定義するとき、 S_1 の表面の外向き法線単位ベクトルを $d\mathbf{S}$ (閉曲面の外向き法線単位ベクトル) としたとき、 S_2 の表面の外向き法線単位ベクトルは $d\mathbf{S}' = -d\mathbf{S}$ となる。よって、

$$\iint_{S_1} \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}'$$

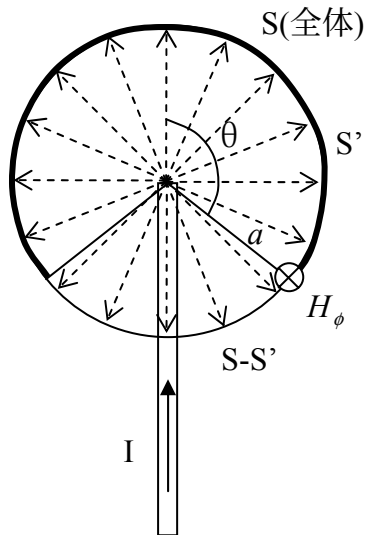
となり、 $\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ の面積分値 $\iint_{\Sigma} \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$ は面 Σ の取り方に依らない。従って、電荷

が動くことによる真電流 $\mathbf{i}$ のみではなく、電束密度の時間変化を加えた $\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ をアンペアの法則の $\mathbf{i}$ の代わりに用いるべきだったのではないだろうか？これは仮定でしかないが、とりあえず試してみよう。



- ・電流の不連続、端部に貯まる電荷の時間的変化→電荷で生じる電界の変化
- ・アンペアの法則とビオ・サバールの法則の等価性

ビオ・サバールの法則の結果



$$H_{\phi} = \frac{I}{4\pi d}(1 - \cos\theta) = \frac{I}{2\pi d} \times \frac{S'}{S} \quad ? \quad ?$$

ビオ・サバルの法則を用いて計算した真中の式は電束の時間変化（変位電流）も含める事によりアンペアの法則によっても導出されることを示す。

確認：バイオ・サバールと同じ結果になることの確認

変位電流を導入したアンペアの法則: $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$
 $= j_d$

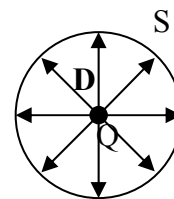
$$[\iint_{S'} \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \text{ の計算}]$$

電流の端に貯まる電荷 Q は、時間を t として

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t I(t) dt, \quad \frac{d}{dt} Q = I(t)$$

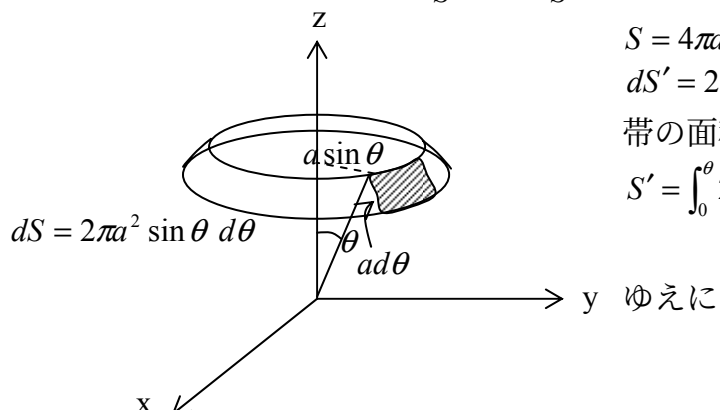
この電荷により、距離 ρ の観測点に生じる電界

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{p}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\rho^2}, \quad \mathbf{D} = \hat{\mathbf{p}} \frac{Q}{4\pi\rho^2}$$



面積 S' を外向きに通過する電束は。

$$\iint_{S'} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \times \frac{S'}{S} = Q \times \frac{S'}{S}$$



$$S = 4\pi a^2$$

$$dS' = 2\pi a \sin \theta a d\theta$$

帯の面積:

$$S' = \int_0^\theta 2\pi a^2 \sin \theta \, d\theta = 2\pi a^2 [-\cos \theta]_0^\theta = 2\pi a^2 [1 - \cos \theta]$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{1}{4\pi a^2} \times 2\pi a^2 [1 - \cos \theta] = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

面積 S' を通過する電束の時間的变化は

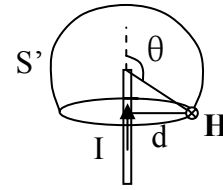
$$\frac{d}{dt} \iint_{S'} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} Q \times \frac{S'}{S} = I \times \frac{S'}{S} = \frac{1 - \cos \theta}{2} I$$

一方、 $\theta = \pi$ 、面積 S' が全空間である場合は、上の値は I となる。

<確認>

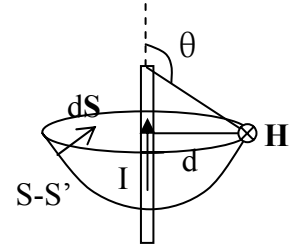
観測点で見込んだ面積 S' を上側に貫通する電流に着目すると、真電流は零で変位電流のみであり、

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \underbrace{\iint_{S'} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}}_{=0} + \iint_{S'} \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \\ 2\pi d H_\phi &= \frac{d}{dt} \left[Q \frac{1 - \cos \theta}{2} \right] = \frac{dQ}{dt} \frac{1 - \cos \theta}{2} = I \frac{1 - \cos \theta}{2} \\ H_\phi &= \frac{1}{2\pi d} \cdot I \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{I}{4\pi d} (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$



逆に下方の面積分 $S - S'$ を考えると、真電流 I と変位電流の差が鎖交電流となる。

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \iint_{S-S'} \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S-S'} \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \\ &= I + \frac{d}{dt} \iint_{S-S'} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = I - \frac{d}{dt} Q \times \frac{S - S'}{S} = I - I \left(1 - \frac{1 - \cos \theta}{2} \right) \\ &= \frac{I(1 - \cos \theta)}{2} \\ 2\pi d H_\phi &= \frac{I(1 - \cos \theta)}{2} \\ H_\phi &= \frac{I}{4\pi d} (1 - \cos \theta) \quad \therefore \mathbf{i} + \mathbf{i}_d \text{ は連続} \end{aligned}$$



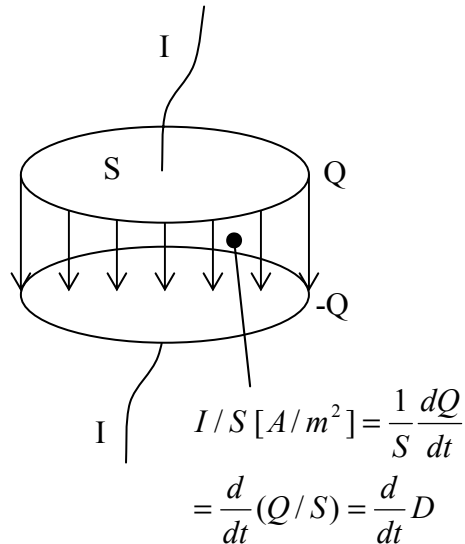
結局いずれの面で考えても鎖交電流は等しくなる。

変位電流を加えた全電流は連続になり、アンペアの法則を適用する時のあいまいさが解消する。

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= 2\pi d H_\phi = \frac{I(1 - \cos \theta)}{2} \\ H_\phi &= \frac{I(1 - \cos \theta)}{4\pi d} \quad \left[\frac{A}{m} \right] \quad \text{ビオ・サバールの法則と同じ解が得られる。} \end{aligned}$$

変位電流のアイデア

コンデンサ内も電流は連続と考える。電束密度の瞬間変化=電流密度



以上の事実から次のように考える。

- 端部の電荷から全空間に仮想的な電流 I が流れ出していると考えれば、導線を通る電流は変位電流に姿を変え、コンデンサ内にも流れ、電流は連続となる。
- この仮想の電流を**変位電流**と呼ぶ。
- 各点における電流密度は、この値を面積で割って、

$$\mathbf{i}_d \triangleq \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad \text{変位電流密度} \quad [A/m^2] \quad (\triangle \text{は定義という意味})$$

- アンペアの法則において、閉路と鎖交する電流は真の電流 I のみではなく、変位電流もあわせたものを用いるべきである。

アンペアの法則

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\mathbf{i} + \mathbf{i}_d) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

変位電流



コーヒー ブレイク (変位電流について)



ジェームズ・クラーク・マクスウェル(James Clerk Maxwell, イギリス, 1831~1879)は1865年にこの**変位電流(displacement current)**という考え方(当時は変位電流という言葉は無かったが)を電気磁気学(Electricity and Magnetism)に導入した。直流でなく、時間変化する電磁界に関する考察を行って方程式を作り、その方程式を解いて電磁波の存在を予言して光と電波(電磁波)は同じ現象ではないかと予想したのである。

電流が連続になり、アンペアの法則の矛盾を解決するように変位電流の概念を導入

微分形

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

変位電流

積分形

$$\begin{cases} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\ \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV \\ \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{cases}$$

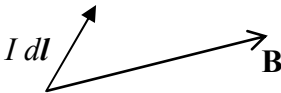
変位電流

- James Clerk Maxwell, "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field," Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol.155, pp.459-512, 1865. (Maxwell の最初の論文)
- J.C. Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, Vol.1, Dover Pubns, 1979. (現在手に入る Maxwell が書いた本)
- J.C. Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, Vol.2, Dover Pubns, 1979. (現在手に入る Maxwell が書いた本)

電磁波の存在を予言したというのは、変位電流を導入して組み立てた Maxwell の方程式(2章で説明)から波動方程式を導き、それを解くと電磁界が波として空間を伝播することが導かれる(3章で説明)。また、その電磁波の速度は光速 c と一致することから、光と電波は同じ現象である(光の電磁波説)と Maxwell は予想したのである(当時、人類が体験したことのある電磁波は光だけだった)。しかし、この計算はあくまで式変形をして導いただけの結論であった。科学(science)という学問は自然(現実)を対象にしているので、理論で導かれたからと言ってそれを結論としてはならず、必ず実験によって確認しなければならない。マクスウェルが予言した電磁波を実験的に発生させて確認したのはハインリッヒ・ヘルツ(Heinrich Rudolph Hertz, ドイツ, 1857-1894)であり、1888年に確認された。また、光の電磁波説は光で成り立つ法則がマクスウェルの方程式から導かれる法則とことごとく一致していくことから次第に確実性を増していった。

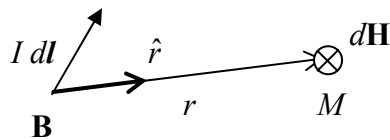
●ファラデーの法則

ローレンツ力の導出

$$\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$


証明)

下の図のように、仮想的ではあるが、磁荷 M が存在し、 M が $\mathbf{B}$ を作り、 $I d\mathbf{l}$ が $d\mathbf{H}$ を作っているとする。



$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}$$

電流 I から磁荷 M に働く力

$$\mathbf{F}' = M d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} M$$

磁荷 M から電流 I に働く力

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}' = \frac{I d\mathbf{l} \times (-\hat{\mathbf{r}})}{4\pi r^2} M$$

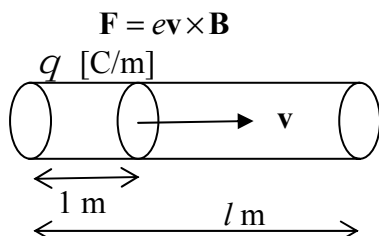
磁荷に対するクーロンの法則より

$$\mathbf{B} = \frac{M(-\hat{\mathbf{r}})\mu}{4\pi \mu r^2} = \frac{-M\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}$$

これを代入して、

$$\mathbf{F} = (I d\mathbf{l}) \times \left(\frac{-M\hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} \right) = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad < Q. E. D. >$$

動く電荷 e [C] に働く力の導出



$$I = q|\mathbf{v}|, \quad \mathbf{l} = l \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

$$\mathbf{F}_{lq} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B} = q|\mathbf{v}| \cdot l \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \times \mathbf{B} = ql \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{lq} / (lq) \times e = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

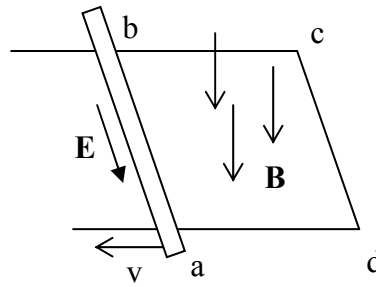
$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/e = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

ローレンツ力からファラデーの法則の導出

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

ab 間距離 l

左方向: $+x$ 軸



$$v = \frac{dx}{dt}$$

下向きに鎖交する磁束

$$\Phi(wb) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = Blx$$

右手系 (右回り) に電界を積分した値

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\ell + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = \int_a^b -vBd\ell = -\ell vB$$

磁束の時間微分は

$$\frac{d}{dt} \Phi = Bl \frac{dx}{dt} = vBl$$

したがって次の関係が成り立つ。

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \Phi = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

ファラデーの法則を得る。

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

●Maxwell の方程式 (積分形)

ガウスの定理

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum Q = \iiint_V \rho dV$$

単位 $Q[C]$

磁束に対するガウスの定理

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

アンペアの法則

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\mathbf{i} + \mathbf{i}_d) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

ファラデーの法則

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

成分方程式

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

