第 7 章　偏微分方程式

機械系，電気系の解析で
集中定数として扱う問題は：常微分方程式
分布定数として扱う問題は：偏微分方程式
例
質点では無く重さがあるバネ
集中定数ではない分布定数の C, L, R

7.2 偏微分方程式の基礎

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \to u=\varphi(y)$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=u \to u(x,y)=\varphi(y)\mathrm{e}^x$

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \to u(x,y)=x\varphi(y)+\vartheta(y)$

$\varphi(y),\vartheta(y)$ は x を含まない y の任意の関数

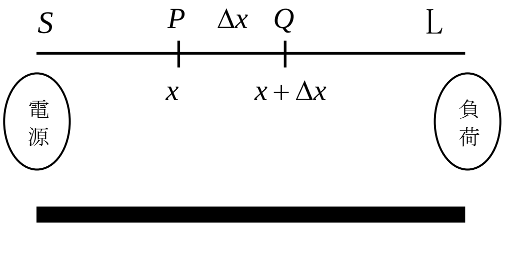
(2)は，$\dfrac{\partial u}{\partial x}-u=0$ を，$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-u\right)\mathrm{e}^{-x}=0$ として

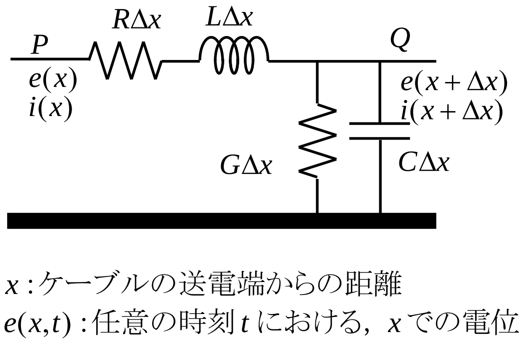
$\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{e}^{-x}-u\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(u\mathrm{e}^{-x}\right)=0$ より $u=\varphi(y)\mathrm{e}^x$

(3)は，$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0$ より $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(y)$

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u-x\varphi(y)\right)=0$ よって，$u-x\varphi(y)=\vartheta(y)$

例：長いケーブルにおける電圧と電流





x：ケーブルの送電端からの距離
$e(x,t)$：任意の時刻 t における，x での電位
$i(x,t)$：任意の時刻 t における，x での電流
R：ケーブルの単位長さあたりの抵抗
L：ケーブルの単位長さあたりのインダクタンス
G：ケーブルの単位長さあたりの対地に対するコンダクタンス
C：ケーブルの単位長さあたりの対地に対するキャパシタンス

$e(x)=(R\Delta x)i+(L\Delta x)\dfrac{\partial i}{\partial t}+e(x+\Delta x)$ ，より，

$e(x+\Delta x)-e(x)=-(R\Delta x)i-(L\Delta x)\dfrac{\partial i}{\partial t}$

Δx で割って Δx を 0 に近づけると

$$\lim_{x\to 0}\frac{e(x+\Delta x)-e(x)}{\Delta x},\ \frac{\partial e}{\partial x}=-Ri-L\frac{\partial i}{\partial t}\quad(1)$$

同様に，$i(x)=(G\Delta x)e+(C\Delta x)\dfrac{\partial e}{\partial t}+i(x+\Delta x)$ だから，Δx で割って Δx を 0 に近づけると

$$\frac{\partial i}{\partial x}=-Ge-C\frac{\partial e}{\partial t}\quad(2)。$$

(1)を x で微分，(2)を t で微分する。

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}=-R\frac{\partial i}{\partial x}-L\frac{\partial^2 i}{\partial x\partial t},\ \frac{\partial^2 i}{\partial t\partial x}=-G\frac{\partial e}{\partial t}-C\frac{\partial^2 e}{\partial t^2},$$

$\dfrac{\partial^2 i}{\partial x\partial t}\left(=\dfrac{\partial^2 i}{\partial t\partial x}\right)$ を消去し $\dfrac{\partial i}{\partial x}$ に(2)を代入

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial e}{\partial t}+RGe\quad(3)$$

が得られる。同様に，

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial i}{\partial t}+RGi\quad(4)$$

大地への漏電と送電線のインダクタンスが無視できると，$G=L=0$ だから，(3)(4)式は

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}=RC\frac{\partial e}{\partial t},\qquad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=RC\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{1}{D}\frac{\partial e}{\partial t},\ \frac{1}{D}=RC\ \ (7.8)\right)$$

の拡散方程式になる。これは周波数が低く線路抵抗が大きい場合に適用できる。
周波数が高い場合は，時間の2回微分の項が相対的に大きく $\dfrac{\partial^2 e}{\partial t^2}\gg\dfrac{\partial e}{\partial t},e$，$\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2}\gg\dfrac{\partial i}{\partial t},i$。よって(3)(4)式は，

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 e}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}=LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},c=\sqrt{\frac{1}{LC}}\,(7.27)\right)$$

の波動方程式になる。$\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ は速度の次元。

7.3 拡散方程式（熱伝導方程式）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (7.1)$$

熱の伝導，電気伝導，物質の拡散など，(7.1)は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (7.1)'$$

例: x 軸上に置かれた棒の温度分布は，点 x の時刻 t における温度 $u(x,t)$ をとすると

$\displaystyle\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0<x<L,\, t>0)$　で表される。

境界条件 $u(0,t)=0$，$u(L,t)=0$，

初期条件 $u(x,0)=f(x)$，を満たす解は，

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}x\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Dt\right)$$

ここで，$B_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad (7.19)$

また，$(-\infty<x<\infty,\, t>0)$ で，$u(x,0)=f(x)$ の場合は，

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\exp\left(-\frac{(s-x)^2}{4Dt}\right)ds$$

(7.23)式

7.4 波動方程式

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (7.27)$$

弦の振動，膜の振動，電磁波の伝搬などの波動現象。また，境界条件 $v(0,t)=0$，$v(L,t)=0$，

初期条件 $v(x,0)=f(x),\ \dfrac{\partial}{\partial t}v=g(x)$，を満たす解は，

$$v(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{L}x\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}ct+b_n\sin\frac{n\pi}{L}ct\right)$$

ここで，$a_n=\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$，

$b_n=\dfrac{L}{cn\pi}\displaystyle\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad$ (p.99)