

第5章級数による解法, ベッセルの微分方程式

級数による解法

1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (1)$$

(1)の解で, 初期条件 $x = x_0, y = y_0$ を満たす解が点 (x_0, y_0) の近傍でただ 1 つ存在する場合, これを求めるため, $x = x_0$ を中心とするテイラー級数で解 y を求める。

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots a_n(x - x_0)^n + \cdots \quad (2)$$

初期条件より, $a_0 = y_0$ 。(2)の両辺を微分

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots \quad (3)$$

(2)(3)を(1)に代入して係数 $a_1, a_2, a_3, \dots$ を決定すると解 y を求めることができる。この解法をべき級数による解法という。なお, 初期条件 $x = 0, y = y_0$ で微分方程式(1)を解くときは, $x = 0$ を中心とする級数により y を求める。

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^n + \cdots$$

例

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = x \text{ をべき級数による解法で解け}$$

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n + \cdots$$

とおくと,

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} + \cdots \frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \quad (5.2)$$

もとの微分方程式に代入して

$$\left\{ a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} + \cdots \right\} - 2\left(a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots a_{n-2}x^{n-1} + a_{n-1}x^n + \cdots \right) = x$$

よって

$$a_1 + (2a_2 - 2a_0)x + (3a_3 - 2a_1)x^2 + \cdots + (na_n - 2a_{n-2})x^{n-1} + \cdots = x$$

両辺の係数を比較して

$$a_1 = 0, 2a_2 - 2a_0 = 1, 3a_3 - 2a_1 = 0, na_n - 2a_{n-2} = 0$$

よって

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}(1 + 2a_0), a_3 = \frac{2}{3}a_1, \cdots a_n = \frac{2}{n}a_{n-2}, \cdots$$

よって n が奇数ならば

$$a_{2m+1} = 0 \quad (n = 2m+1), \quad \text{偶数ならば,}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(1 + 2a_0), a_{2m} = \frac{1}{m}a_{2m-2} \quad (m \geq 2)$$

$$a_{2m} = \frac{1}{m(m-1) \cdots 2 \cdot 1} a_2 = \frac{1}{m!2} (1 + 2a_0) \quad (m \geq 1)$$

これらを(1)に代入すると

$$y = a_0 + \frac{1}{2}(1 + 2a_0) \left(x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots \frac{1}{m!}x^{2m} + \cdots \right)$$

よって

$$y = -\frac{1}{2} + c \left(1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots \frac{1}{m!}x^{2m} + \cdots \right)$$

ここで: 任意定数。一般解は $y = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}$ 。

1階常微分方程式 解の公式をつかうと

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left\{ \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C \right\}$$

$$y = e^{-\int (-2x)dx} \left\{ \int e^{\int (-2x)dx} xdx + c \right\} = e^{x^2} \left(\int e^{-x^2} xdx + c \right) = e^{x^2} \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C \right) = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}$$

と同じ。

※べき級数による解法 $\longleftrightarrow$ 公式による解法

(非斉次方程式)

2階斉次線形微分方程式

の一般解は次式で表わされる。

$$y = c_1 \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) + c_2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right)$$

5.1 級数による解法

$$y = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots$$

まとめると

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad (5.1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i \quad (5.3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i x^{i-2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1) a_{i+2} x^i \quad (5.4)$$

(5.12) (5.3) (5.4)を(5.2)に代入すると

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1) a_{i+2} x^i + P(x) \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i + Q(x) \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 0$$

この式が成り立つのは x の各べき係数が 0 のときであり, 結果として係数 a_i が定まる。

5.2 ベッセルの微分方程式とベッセル関数

ベッセルの微分方程式は

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

級数の方法で解くと(教科書参照)

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

第 1 種ベッセル関数という。

ここで, Γ 関数は

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^\alpha dt = e^{-t} t^\alpha \Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha \Gamma(\alpha) \end{aligned}$$

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = \Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!, \quad \text{よって}$$

$$\Gamma(k+1) = k! \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\ &= 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots \end{aligned}$$

同様に $J_1(x) =$

$$\frac{x}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!4!} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots \right\}$$