２階線形微分方程式と機械振動・回路解析

- 機械系と電気系の方程式
- コンデンサの放電回路
- コンデンサの充電回路

2階線形微分方程式

摩擦の無い面に置いた質量 m の物体をバネ定数 k のバネにより x 方向に引いた状態:

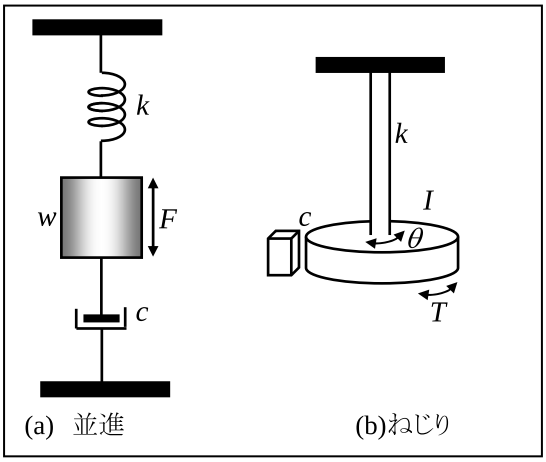
$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=0$ より, $\lambda^2+\dfrac{k}{m}=\lambda^2+{\omega_0}^2=0$ より,

$\lambda=\pm j\omega_0$。初期条件は $t=0$ で $x(0)=x_0$。

$$x(t)=c_1'\mathrm{e}^{j\omega_0 t}+c_2'\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$$

$x(0)=A=x_0$, 初速度は $v(0)=0$ より, $v(t)=-\omega_0 A\sin\omega_0 t+\omega_0 B\cos\omega_0 t$ だから $v(0)=\omega_0 B=0$, $B=0$。よて $x(t)=x_0\cos\omega_0 t$

機会振動の例



(a)並進

おもりの平行位置からの垂直方向の変位: y (上方向を正), 力 F ＝質量 m ×加速度 a , バネ定数 k , 摩擦係数 ρ , とすると

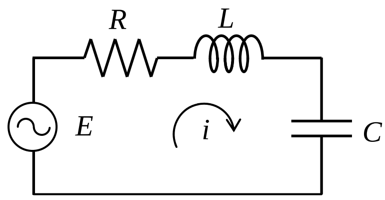
$$F=ma=-\rho v+k\left(mg/k-y\right)-mg+F_0\cos\omega t$$
$$=-\rho v-ky+F_0\cos\omega t$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\rho\frac{dy}{dt}+ky=F_0\cos\omega t, \quad \cdots(1)$$

(b)ねじり

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}+c\frac{d\theta}{dt}+k\theta=T_0\cos\omega t \quad \cdots(2)$$

電気系（直列）キルヒホッフの第二法則



回路素子電圧:インダクタ: $L\dfrac{di}{dt}$,　抵抗: Ri ,

コンデンサ: $\dfrac{1}{C}\int^t i\,dt$, 電源: $E=E_0\cos\omega t$,

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int^t i\,dt=E_0\cos\omega t \quad \cdots(2)$$

$Q=\int^t i\,dt$ とおくことで,

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E_0\cos\omega t \quad \cdots(3)$$

初期条件は

$$Q(0)=\int^{t=0} i\,dt=Q_0,\ \left.\frac{dQ}{dt}\right|_{t=0}=i(0)=i_0$$

(2)を時間微分すると

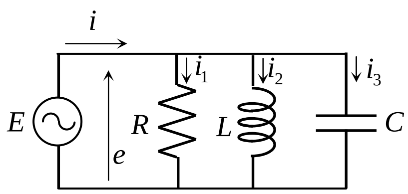
$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=-\omega E_0\sin\omega t \quad \cdots(4)$$

初期条件は $i(0)=i_0$, $\left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0}=i_0'$。

なお(2)より

$$\frac{di}{dt}=\frac{1}{L}\left(E_0\cos\omega t-Ri-\frac{1}{C}\int^t i\,dt\right) \quad \cdots(5)$$

電気系（並列）キルヒホッフの第一法則



素子を流れる電流:インダクタ: $\dfrac{1}{L}\int^t e\,dt$, 抵抗: $\dfrac{e}{R}$, コンデンサ: $C\dfrac{de}{dt}$, 印加電流 $I_0\cos\omega t$

$$C\frac{de}{dt}+\frac{1}{R}e+\frac{1}{L}\int^t e\,dt=I_0\cos\omega t \quad \cdots(6)$$

$U=\int^t e\,dt$ とおくことで,

$$C\frac{d^2U}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dU}{dt}+\frac{U}{L}=I_0\cos\omega t \quad \cdots(7)$$

初期条件は

$$U(0)=\int^{t=0} e\,dt=U_0,\ \left.\frac{dU}{dt}\right|_{t=0}=e_0$$

(6)を時間微分すると

$$C\frac{d^2e}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{de}{dt}+\frac{e}{L}=-\omega I_0\sin\omega t \quad \cdots(8)$$

初期条件は

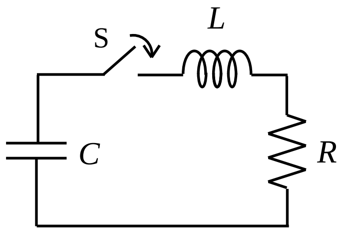
$$e(0)=e_0,\ \left.\frac{de}{dt}\right|_{t=0}=e_0'$$

(1)(3)(4)(7)(8)は本質的に同じ

電気系と機械系の対比((1)(3)(4)式)

並進－機械系	直列－電気系
質量 w/g	インダクタンス L
摩擦 c	抵抗 R
バネ定数 k	キャパシタンスの逆数 $1/C$
力 F	印加電圧 E (印加電圧の時間微分 E')
変位 y	電荷 Q (電流 i)

RLC 回路



コンデンサの放電回路—1

コンデンサはスイッチを閉じる前に電圧 V_0 に充電されている(初期電荷 $Q_0=CV_0$)

(4)式より

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{CL}=0$$

特性方程式より

$$\lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{CL}=0,$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2-4\frac{1}{CL}}\right\}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{CL}}$$

よって根の実数部分は常に負。ルート内の符号に応じて3つに分類。$R^2>=<4\frac{L}{C}$

① $R^2>4\frac{L}{C}$ (異なる2実根):過制動

$$\lambda_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{CL}}=-\frac{1}{\tau}\pm\omega \quad \text{とおく}$$

$$i(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=c_1e^{\left(-\frac{1}{\tau}+\omega\right)t}+c_2e^{\left(-\frac{1}{\tau}-\omega\right)t}$$

$$=e^{-\frac{t}{\tau}}\left(c_1e^{\omega t}+c_2e^{-\omega t}\right)$$

$i(0)=e^0\left(c_1e^0+c_2e^0\right)=0$ より, $c_1=-c_2$, よって

$$i(t)=c_1e^{-\frac{t}{\tau}}\left(e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right)=2c_1e^{-\frac{t}{\tau}}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}$$

$$=2c_1e^{-\frac{t}{\tau}}\sinh\omega t$$

ここで,

$$\frac{di(t)}{dt}=2c_1\left(-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\sinh\omega t+e^{-\frac{t}{\tau}}\omega\cosh\omega t\right)。$$

$t=0$ での値を $L\frac{di(t)}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_t^0 i\,dt=0$ より考えると, コンデンサの初期電圧は V_0 だから

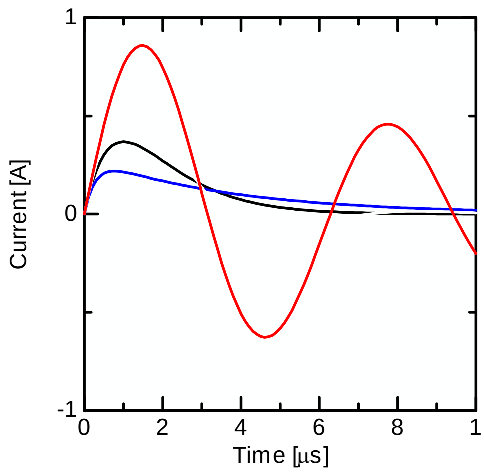
$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0}=2c_1\omega=\frac{1}{L}\left[-Ri-\frac{1}{C}\int^t i\,dt\right]_{t=0}$$

$$=\frac{1}{L}\left(Ri(0)+\frac{1}{C}\int_t^0 i\,dt\right)=\frac{V_0}{L}$$

よって, $c_1=\frac{V_0}{2\omega L}$ だから,

$$i=\frac{V_0}{\omega L}e^{-\frac{R}{2L}t}\sinh\omega t,\ \omega=\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{CL}}$$

② $R^2=4\frac{L}{C}$（重根）：臨界制動



電流波形:
青:過制動，黒:臨界制動，赤:減衰振動

$$\lambda=-\frac{R}{2L}=-\frac{1}{\tau},$$

$$i(t)=c_1e^{-\frac{1}{\tau}t}+c_2te^{-\frac{1}{\tau}t}=e^{-\frac{1}{\tau}t}\left(c_1+c_2t\right),$$

$i(0)=e^0\left(c_1+0\right)=0$ より，$c_1=0$，よって

$i(t)=c_2te^{-\frac{t}{\tau}}$。前と同様，初期条件を考えて，

$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0}=c_2e^{-\frac{t}{\tau}}+c_2t\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=c_2e^{-\frac{t}{\tau}}\left[1-\frac{t}{\tau}\right]_{t=0}=c_2=\frac{V_0}{L}$$

より，$i=\frac{V_0}{L}t\,e^{-\frac{R}{2L}t}$

③ $R^2<4\frac{L}{C}$（虚根）：減衰振動

$$\lambda_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm j\sqrt{\frac{1}{CL}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}=\alpha\pm j\omega$$ とおくと

$$i=e^{\alpha x}(c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x)$$
$$=e^{-\frac{R}{2L}t}\left(c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x\right)$$

$i(0)=e^0\left(c_1+c_2\cdot 0\right)=0$ より，$c_1=0$，よって

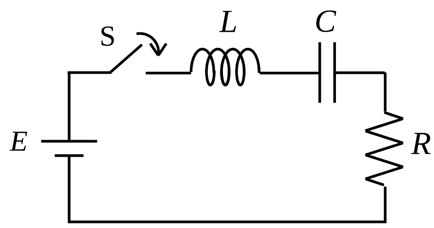
$$i(t)=c_2e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t$$

$$\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left[-c_2\frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t+c_2e^{-\frac{R}{2L}t}\omega\cos\omega t\right]_{t=0}$$

$$=c_2\omega=\frac{V_0}{L}\qquad c_2=\frac{V_0}{\omega L}$$

$$i=\frac{V_0}{\omega L}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t,\quad \omega=\sqrt{\frac{1}{CL}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

充電回路—1



$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int^t i\,dt=E_0\cos\omega t$$

時間微分すると

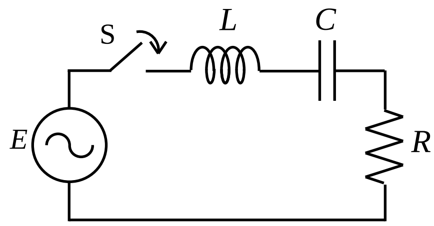
$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{CL}=0$ となり，放電回路と同じ

ただし，初期条件は

$$i(0)=i_0,\quad \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=i_0'$$

なお $\frac{di}{dt}=\frac{1}{L}\left(E_0\cos\omega t-Ri-\frac{1}{C}\int^t i\,dt\right)$ $\cdots(5)$

コンデンサの充電回路—2　別途プリント



放電回路—2（共振）