

第3章 2階斉次線形微分方程式

2階: 最高階数が2

斉次: y と y の導関数を含む項を左辺に移項すると右辺が 0

線形: y と y の導関数について1次方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \quad (3.1)$$

$P(x), Q(x)$ は x のある区間で連続関数

基本解: 互いに 1 次独立な 2 つの解のこと

$$y_1(x), y_2(x)$$

一般解: 基本解に任意定数をかけた和

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

定係数: $P(x) = P, Q(x) = Q$

特性方程式による解法

x の関数: 1 つの基本解→公式より他の解

3.1 定係数斉次線形微分方程式

3.1.2 解法

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0 \quad (3.2)$$

$y = ce^{\lambda x}$ (c 定数) が解であるとする、

$$ce^{\lambda x}(\lambda^2 + P\lambda + Q) = 0 \text{ より,}$$

$$\lambda = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 + 4Q}}{2},$$

特性方程式: $\lambda^2 + P\lambda + Q = 0$

特性根と一般解

(1) 異なる 2 実根: λ_1, λ_2

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

(2) 重根: λ

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$$

(3) 虚根: $\lambda = \alpha \pm j\beta$

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

* (1) は 1 次独立であることを確かめよ

3.5(後述)より, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるから,

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0$$

* (2) の根について, $y = xe^{\lambda x}$ が微分方程式の解であることを確かめよ(教科書 p34 解説)

* (3) の $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ は,

$$y = e^{\lambda x} = e^{(\alpha \pm j\beta)x} = e^{\alpha x} e^{\pm j\beta x} \text{ より,}$$

$$y = ae^{\lambda_1 x} + be^{\lambda_2 x}$$

$$= ae^{\alpha x}(\cos \beta x + j \sin \beta x) + be^{\alpha x}(\cos \beta x - j \sin \beta x)$$

$$= (a+b)e^{\alpha x} \cos \beta x + j(a-b)e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$= c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

3.1.1 バネにつながれたおもりの運動(教科書)

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky,$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \text{ とおけば } \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0, \text{ だから}$$

$\lambda = \pm j\omega_0$. 解の公式から

$$y = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t \text{ となる.}$$

初期条件として, $t = 0$ で $y = y_0, dy/dt = 0$ とす

$$\text{れば } y_0 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1,$$

$$dy/dt = -c_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + c_2 \omega_0 \cos \omega_0 t \text{ より,}$$

$$0 = -c_1 \omega_0 \sin 0 + c_2 \omega_0 \cos 0 \text{ から } c_2 = 0.$$

よって $y = y_0 \cos \omega_0 t$ の単振動となる

速度に比例する摩擦抵抗を受ける場合は,

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - \rho \frac{dy}{dt}.$$

よって $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\rho}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0$ 。この場合は,

$$D = \left(\frac{\rho}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right) \text{ の符号により解が異なる.}$$

$D > 0$: 過制動,

$D = 0$: 臨界制動,

$D < 0$: 減衰振動。(LCR 回路の解で再掲)

3.2 非定係数斉次線形微分方程式の 1 つの解

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \quad (3.1)$$

(1) $m(m-1) + mxP(x) + x^2Q(x) = 0$ のとき

$$1 \text{ つの解: } y = x^m$$

(2) $m^2 + mP(x) + Q(x) = 0$ のとき

$$1 \text{ つの解: } y = e^{mx}$$

それぞれの解を, 1 階微分, 2 階微分して(3.1)に代入することで確認

$$(1) y = x^m, \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

$m(m-1)x^{m-2} + mx^{m-1} + x^m = 0$, x^{m-2} で割れば $m(m-1) + mxP(x) + x^2Q(x) = 0$

$$(2) y = e^{mx}, \quad \frac{dy}{dx} = me^{mx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$$

同様

解法: 一方をまず求め, 2つめは公式で求める

(3.9) (2階微分方程式だから解は2つ)

* $P(x) + xQ(x) = 0$ のとき, $y = x$ が解。

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ だから, } 0 + P(x) + Q(x)x = 0$$

(方程式を正規形 ($x^2 + px + q = 0$) にし,

$Q(x)$ が $1/x^2$ を含むかどうかで判別)

参考

一般形 $ax^2 + bx + c = 0$

正規形 $x^2 + px + q = 0$

標準形 $k(x+l)^2 + m = 0$

(見かけ上1次の項をもたない2次方程式)

3.3 非定係数斉次線形微分方程式の一般解

(3.1) の基本解を y_1 とすると, これと1次独立なもう1つの解は

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int P(x')dx'\right) dx, \quad (3.9)$$

導出: $y = y_1 z$ が(3.1)を満足するように z を決める。p.38~40

一般解は

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \\ &= c_1 y_1(x) + c_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int P(x')dx'\right) dx \end{aligned}$$

3.4 2階斉次線形微分方程式の標準形

$y = uv$ とおいて u に関する2階斉次線形微分方程式に変換する。

(3.1) の微分方程式において

$$v = \exp\left(-\frac{1}{2} \int P(x)dx\right), \quad (3.11) \text{ とおき}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(Q(x) - \frac{1}{2} \frac{dP(x)}{dx} - \frac{1}{4} P(x)^2 \right) u = 0 \quad (3.12)$$

より u の一般解を求める。 $y = uv$ が解

3.5 2つの解の独立性

2階微分方程式の解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ が互いに独立であるとは, $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ が成り立つのが $c_1 = c_2 = 0$ の場合に限られるときをいう。

1次独立でないときは1次従属という。

1次独立であるための必要充分条件はロンスキ-行列 W の行列式 $|W|$ によって与えられる。

$$|W| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix} = y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \neq 0 \quad (3.13)$$

1次独立の証明

$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ を微分して

$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0$, 行列で表すと

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = W(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$W(x)$ に逆行列 W^{-1} があるならば, 上式は

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ となるから, } c_1 = c_2 = 0$$

逆行列が存在するための条件は $|W| \neq 0$

(W の余因子行列を $|W|$ で割って求める)

まとめ:

第3章 基本解, 一般解

3.5 1次独立(ロンスキアン)

3.1 定係数の場合

3.2 1つの解

3.3 一般解

3.4 標準形への変換