

第9回(プリント配付)

- ・ RC 放電回路(電荷, 電流表記)
- ・ RC 充電回路の解法
 - ① 直流(DC)電源
 - ② 交流(AC)電源
 - ③ 交流回路の定常解
- ・ RL 充電回路の解法
 - ① 直流(DC)電源
 - ② 交流(AC)電源
 - ③ 交流回路の定常解

線形1階微分方程式の解法: RC・RL 回路

[1] 線形1階微分方程式の解の一般式の導出

[公式] 線形1階微分方程式 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \cdots (1)$ の

一般解は式(2)で与えられる。

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c_0 \right) \cdots (2)$$

ただし c_0 は定数である。

[導出](定数変化法)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \cdots (3)$$

(3)式の $Q(x) = 0$ とおき, 解 y_0 を求める。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -P(x)y,$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -P(x), \quad \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$$

$$\log|y| = -\int P(x)dx + k \quad (k \text{ は定数})$$

$$y_0(x) = k'e^{-\int P(x)dx} \quad (k' = \pm e^k)$$

次に, $y_0(x)$ を用いて元の微分方程式の解を $y = c(x)y_0(x)$ とおけると仮定し, $c(x)$ を求める。

なお, $y = c y_0$ とおき, 式(3)に代入。

$$\frac{d(cy_0)}{dx} + P(x)cy_0 = Q(x),$$

$$\left(y_0 \frac{dc}{dx} + c \frac{dy_0}{dx} \right) + cP(x)y_0 = Q(x),$$

$$y_0 \frac{dc}{dx} + c \left(\frac{dy_0}{dx} + P(x)y_0 \right) = Q(x)$$

ここで y_0 は $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ の解なので,

$$\frac{dy_0}{dx} + P(x)y_0 = 0 \text{ だから, } y_0 \frac{dc}{dx} = Q(x)$$

$$\frac{dc}{dx} = \frac{Q(x)}{y_0} = \frac{Q(x)}{k'e^{-\int P(x)dx}} = \frac{1}{k'} Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$c = \frac{1}{k'} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c_0 \quad (c_0 \text{ は定数})$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= cy_0 = \left(\frac{1}{k'} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c_0 \right) k'e^{-\int P(x)dx} \\ &= e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + c_0 \right) \end{aligned}$$

[2] RC 回路の解法

① 直流(DC)電源

図1に示す RC 回路を考える。初期状態ではスイッチ S は開放されており, キャパシタには電荷が蓄積されていないとする。直流電圧源の両端電圧を E とし, 時刻 $t=0$ においてスイッチ S を閉じたとき, 時間 t に対して回路に流れる電流 $i(t)$ を求める。

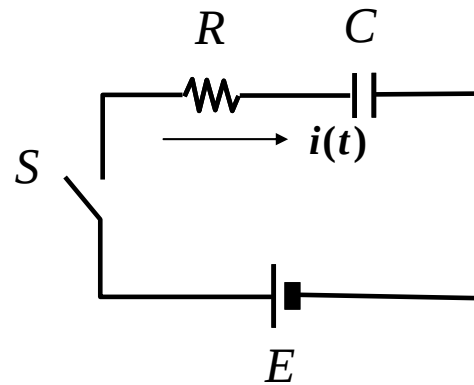


図1 RC 回路(直流電圧源)

時刻 $t=0$ 以降における回路方程式は, 電流 $i(t)$ を用いて: $Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t)dt = E$ 。両辺を t について微分する

と, $t=0$ 以降は E は一定であり $\frac{dE}{dt} = 0$ だから,

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0, \quad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{CR} i, \quad \frac{1}{i} \frac{di}{dt} = -\frac{1}{CR}, \quad \int \frac{di}{i} = -\frac{1}{CR} \int dt$$

$$\log|i| = -\frac{t}{CR} + k \quad (k \text{ は定数}), \quad i = k'e^{-\frac{t}{CR}} \quad (k' = \pm e^k)$$

$t=0$ でキャパシタ両端の電圧は 0 なので, $i(0) = \frac{E}{R}$ 。よ

って $k' = \frac{E}{R}$ より, $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{CR}}$ 。電流波形は図2。

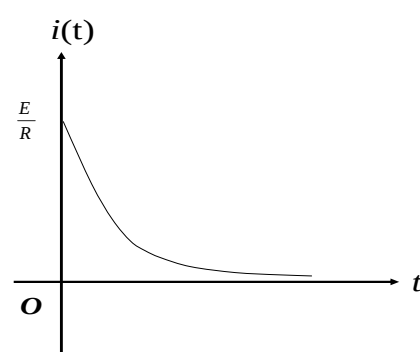


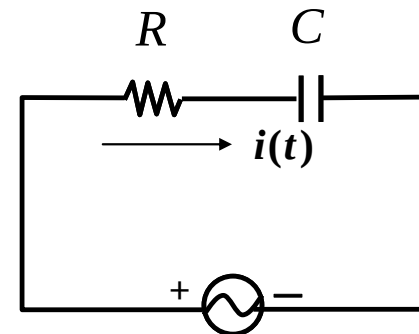
図2 図1の電流(直流電源)

② 交流(AC)電源

図3に示す回路に対して電圧の式を立てると以下の通

りとなる。ただし $v(t) = V_0 \cos \omega_0 t$ ($t \geq 0$), 0 ($t < 0$) とおく。

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t)dt = V_0 \cos \omega_0 t$$



$$v(t) = V_0 \cos \omega_0 t$$

図3 RC 回路(交流電圧源)

両辺を t について微分すると,

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -\omega_0 V_0 \sin \omega_0 t, \quad \frac{di}{dt} + \frac{i}{CR} = -\frac{\omega_0 V_0}{R} \sin \omega_0 t$$

[1]の式(1)の変数 x を t に置き換えてあてはめると

$$P(t) = \frac{1}{CR}, \quad Q(t) = -\frac{\omega_0 V_0}{R} \sin \omega_0 t \text{ を式(2)に代入して,}$$

$$i(t) = e^{-\int \frac{1}{CR} dt} \left(\int \left(-\frac{\omega_0 V_0}{R} \sin \omega_0 t \right) e^{\int \frac{1}{CR} dt} dt + c_0 \right)$$

$$= e^{-\frac{t}{CR}} \left(\left(-\frac{\omega_0 V_0}{R} \right) \int e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t dt + c_0 \right)$$

$$P = \int e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t dt \text{ において部分積分を計算すると,}$$

$$P = \int e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t dt$$

$$= CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t - CR \omega_0 \int e^{\frac{t}{CR}} \cos \omega_0 t dt$$

$$= CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t$$

$$-CR \omega_0 \left(CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} \cos \omega_0 t + CR \omega_0 \int e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t dt \right)$$

$$= CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} (-\omega_0 CR \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t) - (\omega_0 CR)^2 P$$

$$\{1 + (\omega_0 CR)^2\} P$$

$$= CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} (-\omega_0 CR \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t)$$

$$P = CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} \frac{-\omega_0 CR \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t}{1 + (\omega_0 CR)^2}$$

$$= -\frac{CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}}.$$

$$e^{\frac{t}{CR}} \left(\frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos \omega_0 t - \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \sin \omega_0 t \right)$$

$$= -\frac{CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}}.$$

$$e^{\frac{t}{CR}} (\cos \phi \cos \omega_0 t - \sin \phi \sin \omega_0 t)$$

$$= -\frac{CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cdot e^{\frac{t}{CR}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\text{ここで} \left(\tan \phi = \frac{1}{\omega_0 CR} \right), \text{よって,}$$

$$i(t) = c_0 e^{-\frac{t}{CR}} + \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$t=0$ において電源の電圧は V_0 であり, キャパシタの蓄積電荷量が 0 なので $i(0) = \frac{V_0}{R}$ を, 上式に代入して,

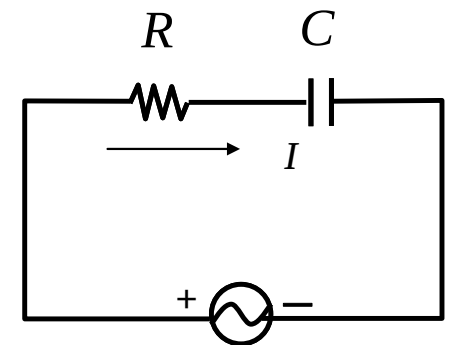
$$c_0 = \frac{V_0}{R} - \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos \phi$$

$$= \frac{V_0}{R} - \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cdot \frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}}$$

$$= \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} \frac{(\omega_0 CR)^2}{1 + (\omega_0 CR)^2} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + (\omega_0 CR)^2}$$

$$\therefore i(t) = \frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + (\omega_0 CR)^2} e^{-\frac{t}{CR}} + \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

③ 交流回路を $v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$ において解く(交流の定常解)。図4。



$$v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$$

図4 RC 回路(交流電圧源)

$$I = \frac{V_0 e^{j\omega_0 t}}{R + \frac{1}{j\omega_0 C}} = \frac{j\omega_0 CV_0 e^{j\omega_0 t}}{1 + j\omega_0 CR}$$

$$= \frac{j\omega_0 C(1 - j\omega_0 CR)V_0}{1 + (\omega_0 CR)^2} e^{j\omega_0 t} = \frac{\omega_0 C(\omega_0 CR + j)V_0}{1 + (\omega_0 CR)^2} e^{j\omega_0 t}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_0 C V_o}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} \left(\frac{\omega_0 C R}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} + j \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} \right) e^{j\omega_0 t} \\
&= \frac{\omega_0 C V_o}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} \\
(\tan \phi &= \frac{1}{\omega_0 C R}) = \frac{\omega_0 C V_o}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} e^{j(\omega_0 t + \phi)} \\
\text{よって実部をとって } i(t) &\text{ が求まる。} \\
i(t) &= \frac{\omega_0 C V_o}{\sqrt{1 + (\omega_0 C R)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)
\end{aligned}$$

この結果は②の定常解の項と一致する。

[3] RL 回路の解法

① 直流(DC)電源: 図5のRL回路を考える。

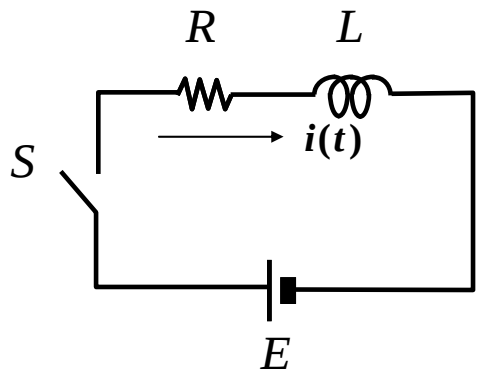


図5 RL 回路(直流電圧源)

初期状態ではスイッチ S が開放されているとする。直流電圧源の両端電圧を E とし、時刻 $t=0$ においてスイッチ S を閉じたとき、時間 t に対して回路に流れる電流 $i(t)$ を求めてみよう。時刻 $t=0$ 以降において、電流 $i(t)$ を用いて電圧に対する式をたてると以下の通りになる。

$$\begin{aligned}
Ri(t) + L \frac{di}{dt} &= E, \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \\
\text{[1]の式(1)の変数 } x &\text{ を } t \text{ に置き換えてあてはめると} \\
P(t) = \frac{R}{L}, \quad Q(t) &= \frac{E}{L} \text{ なので, 式(2)に代入して,} \\
i(t) &= e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left(\int \frac{E}{L} e^{\int \frac{R}{L} dt} dt + c_0 \right) \\
&= e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{E}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} dt + c_0 \right) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + c_0 \right) = \frac{E}{R} + c_0 e^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}$$

ここで $t=0$ においてインダクタ両端の電圧は E なので、 $i(0)=0$ である。よって、

$$\frac{E}{R} + c_0 = 0, \quad c_0 = -\frac{E}{R} \quad \therefore i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

模式的に図示すれば図6となる。

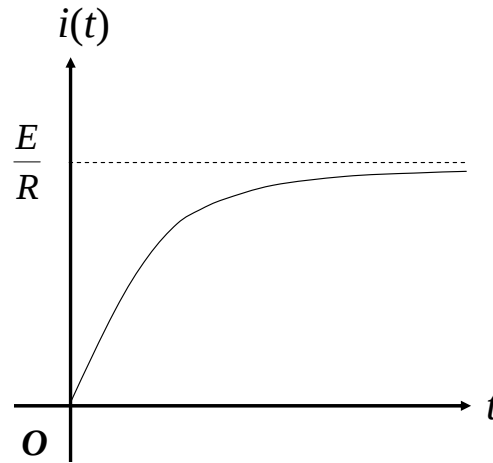
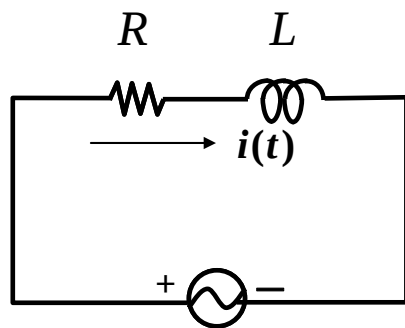


図6 図5の電流(直流電源)

② 交流(AC)電源

図7に示す回路に対して電圧の式を立てると以下の通りとなる。ただし $v(t) = V_0 \cos \omega_0 t$ ($t \geq 0$), 0 ($t < 0$) とおく。

$$Ri(t) + L \frac{di}{dt} = V_0 \cos \omega_0 t, \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_0}{L} \cos \omega_0 t$$



$$v(t) = V_0 \cos \omega_0 t$$

図7 RL 回路(交流電圧源)

[1]の式(1)の変数 x を t に置き換えて、

$$P(t) = \frac{R}{L}, \quad Q(t) = \frac{V_0}{L} \cos \omega_0 t \text{ なので, 式(2)に代入し,}$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left(\int \left(\frac{V_0}{L} \cos \omega_0 t \right) e^{\int \frac{R}{L} dt} dt + c_0 \right) \\
&= e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{V_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t dt + c_0 \right)
\end{aligned}$$

$P = \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t dt$ において部分積分を計算すると、

$$\begin{aligned}
P &= \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t dt = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t + \frac{L}{R} \omega_0 \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega_0 t dt \\
&= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t \\
&\quad + \frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega_0 t - \frac{\omega_0 L}{R} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t dt \right) \\
&= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R} \sin \omega_0 t \right) - \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2 P, \\
\left\{ 1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2 \right\} P &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R} \sin \omega_0 t \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore P &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \frac{\cos \omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R} \sin \omega_0 t}{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \\
&\quad \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \cos \omega_0 t + \frac{\frac{\omega_0 L}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \sin \omega_0 t \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} (\cos \phi \cos \omega_0 t + \sin \phi \sin \omega_0 t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos(\omega_0 t - \phi) \quad (\tan \phi = \frac{\omega_0 L}{R}) \\
\therefore i(t) &= e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{V_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t dt + c_0 \right)
\end{aligned}$$

$$= c_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{L} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \frac{L}{R} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

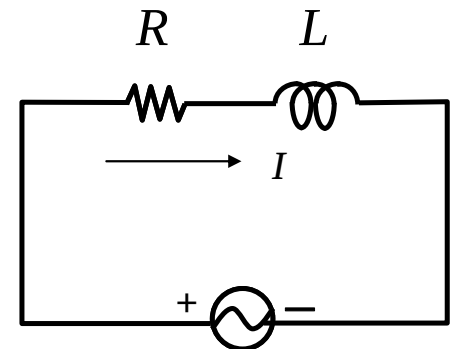
$$= c_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

ここで $i(0) = 0$ なので、上式に代入して、

$$\begin{aligned}
c_0 &= -\frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \cos \phi \\
&= -\frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} = -\frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore i(t) = \frac{V_0}{R} \left[-\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \cos(\omega_0 t - \phi) \right]$$

③ 交流回路を $v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$ において解く(交流の定常解)。図8。



$$v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$$

図8 RL 回路(交流電圧源) $v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{V_0 e^{j\omega_0 t}}{R + j\omega_0 L} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + \left(j \frac{\omega_0 L}{R} \right)} e^{j\omega_0 t} \\
&= \frac{V_0}{R} \frac{1 - \left(j \frac{\omega_0 L}{R} \right)}{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2} e^{j\omega_0 t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} - j \frac{\frac{\omega_0 L}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \right) e^{j\omega_0 t} \\
&= \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} e^{-j\phi} e^{j\omega_0 t} \\
&= \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} e^{j(\omega_0 t - \phi)} \quad (\tan \phi = \frac{\omega_0 L}{R})
\end{aligned}$$

よって実部をとって $i(t)$ が求まる。

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

[2]のRC回路とは位相の進み・遅れの関係が逆。