

A. 微分方程式の用語

微分方程式: ある未知関数の導関数を含んだ方程式を微分方程式といい, 未知関数を求めることを微分方程式を解くという。なお $y = f(x)$ において, y を従属変数, x を独立変数といい, $f(x)$ の微分を導関数という。

階数: 方程式中の導関数の最高階数のこと

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x \text{ は 2 階微分方程式}$$

次数: 最高階の導関数の乗数のこと

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ay = b \text{ は 1 階 2 次微分方程式}$$

線形:

1 次の未知関数またはその導関数のみを含む

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = c : \text{線形}$$

非線形:

1 次以外の未知関数かその導関数を含む

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + by = c : \text{非線形}$$

$$\frac{dy}{dx} + \sin y = c : \text{非線形}$$

一般解: 積分定数(任意定数 C)を含む形の解 $y = F(x) + C$

特殊解: ある条件により積分定数に特定の値を与えた解

初期条件: ある時刻 t での未知関数値 $y(t)$

境界条件: ある位置 x での未知関数値 $y(x)$

常微分方程式: 変数が 1 つの微分方程式

斉次微分方程式: 従属変数と導関数を左辺にまとめた際に右辺が 0 となる方程式のこと

非斉次微分方程式: 上記で右辺が 0 とならない方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$$

偏微分方程式: 偏微分を含む, 変数が 2 つ以上の微分方程式のこと。

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = f^2(x,t)$$

同次方程式: 未知関数 (y) およびその導関数 (y') を定数倍したときに, 元の方程式が全体として定数倍になる方程式

B. 1 階常微分方程式の種類

$$(1) \text{ 変数分離型 } \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, (g(y)dy = f(x)dx)$$

$$(2) \text{ 同次形 } \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$(3) \text{ 線形 } \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

それぞれの解法 (C は任意定数, 導出は後述)

$$(1) \int g(y) dy = \int f(x) dx + C$$

$$(2) u = \frac{y}{x} \text{ とおくと } \int \frac{1}{f(u)-u} du = \log|x| + C$$

$$(3) y = e^{-\int p(x)dx} \left\{ \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx + C \right\}$$

1 階常微分方程式

2.1 直接積分形

$$\frac{dy}{dx} = f(x), x \text{ で積分して一般解を求める}$$

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C. \text{ 初期条件}$$

$$y(a) = c_1 \text{ を代入して特殊解を求める。}$$

$$C = c_1 - F(a) \text{ より } y = \int f(x) dx = F(x) + c_1 - F(a)$$

2.2 変数分離型

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x) \text{ と変形して } x \text{ で積分,}$$

$$\int g(y) \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx, \int g(y) dy = \int f(x) dx.$$

$$G(y) = F(x) + C \text{ (これは一般解)}$$

特殊解は, 初期条件 $x = a, y(a) = c_1$ を代入。

$$G(c_1) = F(a) + C \text{ より, } G(y) = F(x) + G(c_1) - F(a)$$

$$2.3 \frac{dy}{dx} = f(\alpha x + \beta y + \gamma) \text{ 形}$$

右辺が $\alpha x + \beta y + \gamma$ (α, β, γ は定数) のように, ひとかたまりの場合, $u = \alpha x + \beta y + \gamma$ とおくと

$$\frac{du}{dx} = \alpha + \beta \frac{dy}{dx} = \alpha + \beta f(u) \text{ だから,}$$

$$\frac{1}{\beta f(u) + \alpha} \frac{du}{dx} = 1 \text{ より変数分離型に帰着}$$

積分公式

$$\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{z}{a}, \quad \int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{z-a}{z+a} \right),$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \sin^{-1} \frac{z}{a}, \quad \int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \cos^{-1} \frac{a}{z}$$

2.4 同次形 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \cdots \textcircled{1}$

$\frac{y}{x} = u$ と置き換え。 $y = ux$ より両辺を微分すると,

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \quad \text{これを式}\textcircled{1}\text{に代入, } f(u) = u + x \frac{du}{dx}$$

より $f(u) - u = x \frac{du}{dx}$ と変数分離。 $f(u) - u \neq 0$ では

$$\frac{1}{f(u) - u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{より, } \int \frac{1}{f(u) - u} du = \int \frac{1}{x} dx.$$

$G(u) = \log|x| + C$, $G(u)$ は $\frac{1}{f(u) - u}$ の原始関数。

$u = \frac{y}{x}$ より解を求める。なお, $f(u) - u = 0$ の場合は,

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad \text{より, } u = C. \quad \text{よって } y = Cx.$$

2.5 階数の引き下げ: y が含まれない場合

2 階の常微分方程式で, $\frac{dy}{dx} = p$ とおくと p の 1 階微分方程式にできる。 p を求めた後に, y を求める。
 $\frac{dy}{dx}$

空気抵抗を受ける物体の落下

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg + k \left(\frac{dy}{dt} \right)^2, \quad y \text{ が含まれない}$$

2.6 階数の引き下げ: x が含まれない場合

2 階の常微分方程式で $\frac{dy}{dx} = p$ とおくと,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p \quad \text{なので } y, p, \frac{dp}{dy} p \text{ で表}$$

せ p の 1 階微分方程式になる

2.7 階数の引き下げ: y, y', y'' の同次式

$y = ce^z$ (c は定数) とおき,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = ce^z \frac{dz}{dx},$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(ce^z \frac{dz}{dx} \right)$$

$$= c \frac{de^z}{dx} \frac{dz}{dx} + ce^z \frac{d^2 z}{dx^2} = ce^z \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + ce^z \frac{d^2 z}{dx^2}$$

y, y', y'' は同次なので共通項 ce^z を消去。すると x, z', z'' に変形, さらに $\frac{dz}{dx} = p$ とおけば, z について解ける。

2.8 1 階線形常微分方程式の一般解

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

証明例: ①の両辺に $e^{\int p(x)dx}$ をかける。

$$e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + p(x) y e^{\int p(x)dx} = e^{\int p(x)dx} \cdot q(x) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$y e^{\int p(x)dx}$ を x で微分すると,

$$\frac{d}{dx} \left(y e^{\int p(x)dx} \right) = e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + y \frac{d}{dx} \left(e^{\int p(x)dx} \right)$$

$$= e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + y e^{\int p(x)dx} \frac{d}{dx} \left(\int p(x)dx \right)$$

$$= e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + p(x) y e^{\int p(x)dx} =$$

②の左辺になる。よって

$$\frac{d}{dx} \left(y e^{\int p(x)dx} \right) = e^{\int p(x)dx} \cdot q(x) \quad \text{より}$$

$$y e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x) dx + C \quad \text{となるから}$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left\{ \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx + C \right\}$$