

5.3 ローラン級数展開

※正則でない領域を含むときの級数展開

$f(z)$ が $z = z_0$ を除いて正則のとき次のローラン級数展開ができる。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

正則(テイラー展開) 主要部(という)

$$b_n = \frac{1}{j2\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (5.7)$$

* 特異点(p.65)である z_0 を展開の中心とするテイラー展開に負のべき乗項が追加された形。 z_0 で正則でないから $f^{(n)}(z_0)/n!$ は存在しない。

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \text{ とおくと, } \phi(z) \text{ は } z_0 \text{ で正則}$$

$$\text{で, } f(z) = \phi(z) + \frac{b_{-1}}{z - z_0} + \dots + \frac{b_{-m}}{(z - z_0)^m} \dots$$

となる。(なお, b_{-1} を留数という。後述)

特異点が1つである関数のローラン展開:

例 5.5: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ を $z=0$ で, べき級数展開せよ
 $f(z)$ は $z=0$ で正則でないから, $z=0$ を中心にローラン展開。ここでは, e^u のマクローリン展開
 $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ (p.128) を用いる。 $u = \frac{1}{z}$ とおいて,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

何らかのべき級数展開ができれば, よい

複数の特異点をもつ関数のローラン展開:

領域を分けて級数展開する

例 5.6: $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ を $z=1$ で, べき級数展開せよ

$$(1) |z-1| < 2, \quad f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z-1)^{n-1}$$

$$(2) |z-1| > 2, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}}$$

5.4 ローラン級数による特異点の分類

(A) 除去可能な特異点: $b_{-n} = 0, n \geq 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \text{ 主要部がない}$$

(B) m 位の極(主要部が第 m 項まで存在) $b_{-m} \neq 0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \frac{b_{-1}}{z - z_0} + \dots + \frac{b_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

(C) 真性特異点, 主要部が無数個ある

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

例 5.7

第 6 章

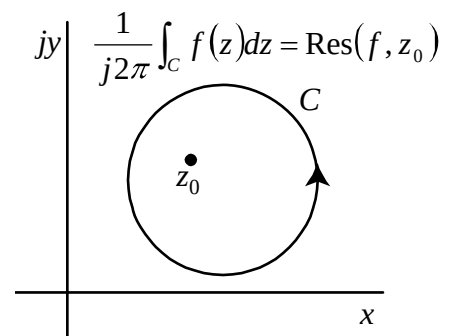
6.1 留数とは何か

関数 $f(z)$ の特異点 z_0 の周りを周回積分し, その積分値を $j2\pi$ で割った値が留数: $\text{Res}(f, z_0)$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{j2\pi} \int_C f(z) dz \quad (6.17)$$

C 内に特異点があれば積分は 0, 留数も 0

図 6.1. 留数を求める→積分値が求まる。



【留数の求め方1】

ローラン展開して -1 次項の係数 b_{-1} を求める。

【留数の求め方2】(直接係数 b_{-1} を求める)

1 位の極の留数は, $b_{-1} = (z - z_0) f(z) \Big|_{z=z_0}$

m 位の極の留数は,

$$b_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] \Big|_{z=z_0}$$

【留数の求め方3】

$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ で, $h(z), g(z)$ は $z = z_0$ で正則かつ

$$g(z_0) = 0, \quad g'(z_0) \neq 0 \text{ のとき, } \text{Res}(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

【求め方1の証明】

ローラン展開 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ の両辺を周

$$\text{回積分: } \int_C f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_C (z - z_0)^n dz$$

$$\text{ここで, } \int_C z^m dz = \begin{cases} 0 & (m \neq -1) \\ j2\pi & (m = -1) \end{cases} \text{ (教 p.109) より}$$

$$\int_C f(z) dz = \int_C \frac{b_{-1}}{z - z_0} dz = b_{-1} \cdot j2\pi \text{ だから, } n = -1$$

の項: $\frac{b_{-1}}{z - z_0}$ だけ残り他は 0。よって,

$$\text{Res}(f, z_0) = b_{-1}$$

【求め方2の証明】

1 位の極の場合は $f(z) = \phi(z) + \frac{b_{-1}}{z - z_0}$ より,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)] = b_{-1}$$

2 位の極では, $f(z) = \phi(z) + \frac{b_{-1}}{z - z_0} + \frac{b_{-2}}{(z - z_0)^2}$,

$$\frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] = \frac{d}{dz} [\phi(z)(z - z_0)^2 + b_{-1}(z - z_0) + b_{-2}]$$

$$= \phi'(z)(z - z_0)^2 + 2\phi(z)(z - z_0) + b_{-1}$$

$$\text{よって, } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] = b_{-1}$$

同様に m 位の極が求まる。

【求め方3の証明:】

$g(z)$ をテイラー展開する。

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots$$

$g(z_0) = 0$ なので

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)} \frac{h(z)}{g'(z_0) + \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0) + \dots}$$

$$1 \text{ 位の極だから, } \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)] = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

求め方 1: 例 6.1p.140 特異点での留数

求め方 2: 解く p.144

求め方 3: 例 6.3p.146

6.2 留数の定理

閉曲線 C の内部に m 個の特異点 z_i があるとき

$$\int_C f(z) dz = j2\pi \sum_{i=1}^m \text{Res}(f, z_i)$$

閉曲線 C の周回積分は留数の和 $\times j2\pi$

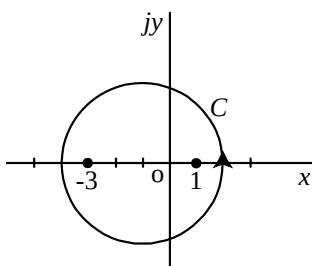
なお積分路が時計回りならば右辺はマイナス

証明は多重連結領域の分割。

例 6.4p.148

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+3)^2}$$

の周回積分を求めよ。



注意: 周回積分では, 特異点における留数の和を求めるだけでなく, 積分範囲の考慮が必要

6.3 複素積分による実積分

(1) 三角関数を含む定積分:

$$\int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$$

$z = e^{j\theta}$ とおく。 $\theta: 0 \rightarrow 2\pi$ だから $C: |z|=1$ にそった周回複素積分。留数の定理より求める。一般形は

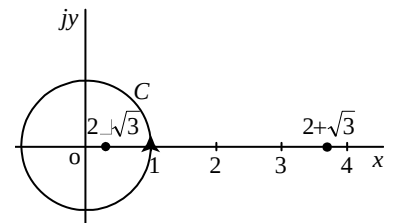
$$\int_0^{2\pi} f\{\cos \theta, \sin \theta\} d\theta = \int_C f\left\{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2j}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\} \frac{dz}{jz}$$

実積分

複素積分

(6.7)

$$\text{例: } \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos \theta} d\theta$$



—

第6回のまとめ

- ローラン級数展開, 主要部

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

- 特異点の分類3種, 除去可能, 極, 真性

- 留数の定義: $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{j2\pi} \int_C f(z) dz$

- 留数の求め方: (1)ローラン展開で b_{-1}

- (2)極 $b_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \Big|_{z=z_0}$

- 留数定理 $\int_C f(z) dz = j2\pi \sum_{i=1}^m \text{Res}(f, z_i)$

- 三角関数を含む実定積分

$$\int_0^{2\pi} f\{\cos \theta, \sin \theta\} d\theta = \int_C f\left\{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2j}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\} \frac{dz}{jz}$$

中間試験

日時: 5月27日(木)

10時40分~12時10分

場所: S633講義室(a,b 別教室, 同問題)

(開始 5 分前までに着席すること)

範囲: 教科書 3.5 節および 7 章以外の全て

注意: 教科書ノート参照不可

なお, 5 時限目は休講