

3.1 正則関数とは

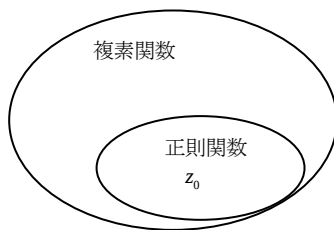
複素平面上の点 z_0 とその近傍で $f(z)$ が微分可能であるとき、 $f(z)$ は z_0 で**正則**であるといい、 $f(z)$ を**正則関数**という。微係数が存在しない点を**特異点**という。

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ または}$$

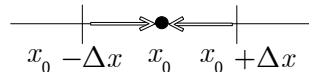
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

z_0 で正則とは、 z_0 および $|z - z_0| < \delta$ (近傍) で $f'(z)$ が存在すること。 $f(z)$ が正則とは、すべての z で $f'(z)$ が存在すること。

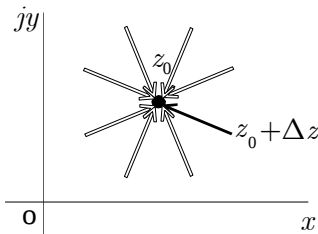
関数の包含関係



実関数の微係数



複素関数の微係数

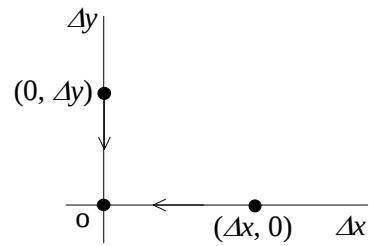


例 $f(z) = \bar{z}$ は微分可能でないことを示せ。

$z = x + jy$ とおくと $\bar{z} = x - jy$ だから、導関数は

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\{(x + \Delta x) - j(y + \Delta y)\} - (x - jy)}{\Delta x + j\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x - j\Delta y}{\Delta x + j\Delta y} \end{aligned}$$

となる。 $\Delta z \rightarrow 0$ の方向は無限通りあるが、下図に示す2通りの方向で求める。 x 軸に平行な場合は



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = 1 \quad (\Delta x \rightarrow 0, \Delta y = 0) \quad \text{① となり,}$$

y 軸に平行な場合は

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = -1 \quad (\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0) \quad \text{②}$$

となる。このように①と②は一致せず $\Delta z \rightarrow 0$ の取り方で極限值が異なり、値が確定しない。よって微分可能でない。

よく使う微分公式 (p68)

1. $\sim$ 5.

6. $e^z, \sin z, \cos z, \tan z, \log z, \sinh z, \cosh z$ など
は実関数の導関数と形式的に同じ。

例: ド・ロピタルの公式を証明せよ。

$f(z_0) = g(z_0) = 0$ だから、

$f(z) = (z - z_0)\phi(z)$, $g(z) = (z - z_0)\psi(z)$ とかける。

上式を微分すると $f'(z) = \phi(z) + (z - z_0)\phi'(z)$
 $g'(z) = \psi(z) + (z - z_0)\psi'(z)$

$g'(z_0) \neq 0$ であるから整理して、

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)\phi(z)}{(z - z_0)\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi(z)}{\psi(z)} \\ &= \frac{\phi(z_0)}{\psi(z_0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \end{aligned}$$

3.2 コーシー・リーマンの関係式

複素関数 $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ の $u(x, y)$, $v(x, y)$ が**連続な偏導関数**を持つ場合、関数 $f(z)$ が正則であるための必要十分条件は(3.1)式で、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.1)$$

正則関数の微分は, (3.2)式で与えられる。

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.2)$$

コーシー・リーマンの関係式は正則関数であるための必要条件で, 証明は教科書 p. 74。

必要条件の証明。複素関数の微分は定義式より,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \text{ となる。} f(z) \text{ が微分}$$

可能であるためには, あらゆる方向から近づいても極限値が存在しなくてはならない。

$\Delta x \rightarrow 0$ ($\Delta y = 0$) の方向 (x 軸に平行) で極限をとる

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta x) - f(z)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + j \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

$\Delta y \rightarrow 0$ ($\Delta x = 0$) の方向 (y 軸に平行) で極限をとると

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{j \Delta y} \\ &\quad + j \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{j \Delta y} = -j \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

微分可能であるには上記2式が同じ値に確定する必要がある。両式の実部虚部を等しいとみると, コーシー・リーマンの関係式が得られる。また同時に (3.2) の導関数が得られる。

注: 複素関数 $f(z)$ が正則であるための必要条件は, コーシー・リーマンの関係式が成り立つことで, さらに, ある点の近傍で連続な偏導関数を持つことを加えると十分条件となる。

3.3 関数の正則性確認と微分 (導関数)

正則性確認(コーシー・リーマンの関係式)

偏導関数の連続性→もと関数の導関数

正則関数の組み合わせ→正則関数

$W(z, \bar{z})$ による正則性の判定

$z = x + jy$, $\bar{z} = x - jy$ より

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2j}$$

任意の複素関数 W を $W(z, \bar{z})$ で表したとき,

$$\frac{\partial W(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ であれば } W(z, \bar{z}) \text{ は正則。}$$

* $\bar{z}$ を含まず z のみで表される

$W(z, \bar{z})$ の証明

$$W(z, \bar{z}) = u(x, y) + jv(x, y) \text{ より, } \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + j \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}。$$

ここで $\bar{z}$ は x, y の関数だから,

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}。$$

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2j} \text{ より } \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{j}{2}, \text{ よって}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial y} \right)。$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} \right) + j \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + j \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

常に 0 となるのは, 括弧内が 0 の場合で, これはコーシー・リーマンの関係式と一致。

まとめ

- 複素関数の微分と正則関数
- z_0 で正則, $f(z)$ が正則
- 正則性の判定

(1) 微分の定義式

(2) コーシー・リーマンの関係式

(3) $W(z, \bar{z})$ への置き換え