

## 2.1 実関数

指数関数  $y = a^x$ ,  $f'(x) = e^x$  (2.1)対数関数  $y = \log_a x$  (2.3) (自然対数  $\log x$ )三角関数  $y = \sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ 逆三角関数  $y = \sin^{-1} x$ ,  $\cos^{-1} x$  (2.23),  $\tan^{-1} x$ 双曲線関数  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \{ (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \} = 1$$

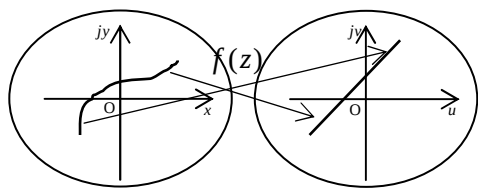
$$(\cosh x)' = \sinh x, (\sinh x)' = \cosh x \quad (2.27)$$

## 2 変数関数(実関数): 変数と関数値は同一平面

例:  $f(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$  (半径  $r$  の円)変形すると  $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ 実数であるためには  $-r \leq x \leq r$ 

## 2.2 複素関数とは

2つの複素平面上の点または線に対応づける関数

 $f(z)$  のこと $z$  平面上:  $z = x + jy$  : 複素変数 $w$  平面上:  $w(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$  : 複素関数値例 2.2:  $f(z) = z^2$ , は複素平面上でどのような曲線を描くか。ただし  $z = x + jy$  の  $y = x$  とする。

$$z = (1 + j)x \Leftrightarrow f(z) = 2jx^2 \quad (\text{図 2.12})$$

補足: 関数  $f(x)$  のテイラー展開とは:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n : \text{べき級数で表示}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots$$

$$x_0 = 0 \text{ のとき } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (\text{マクローリン})$$

$$\text{例えば, } e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

2.3 指数関数 (底は  $e$  とする)

実関数の級数展開を複素数に発展し級数で定義:

$$f(z) = e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots + \frac{1}{n!}z^n + \dots \quad (2.31)$$

積演算の確認

$$\begin{aligned} e^{z_1} \times e^{z_2} &= \left( 1 + z_1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \dots \right) \left( 1 + z_2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \dots \right) \\ &= 1 + (z_1 + z_2) + \frac{1}{2}(z_1 + z_2)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n + \dots \\ &= e^{z_1 + z_2} \end{aligned}$$

## 指数関数の周期性

$$f(z) = e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x (\cos y + j \sin y)$$

 $\cos y, \sin y$  は  $2\pi$  の周期関数よって,  $e^z$  も周期関数となる。例 2.3:  $e^z = 1$  の解 (無限通りの解がある)解:  $e^z = 1 + j$ , 2通りの解法

## 2.4 三角関数

Taylor 展開: 実数の三角関数は

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

複素関数を級数で定義 ( $m$  は自然数)

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos z \\ &= 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \dots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!} z^{2m} + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin z \\ &= z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \dots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} z^{2m+1} + \dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

指数関数表示 (オイラーの公式複素数発展型)

実数のオイラーの公式  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$  (1.12)

複素数のオイラーの公式  $e^{jz} = \cos z + j \sin z$

上記の定義式から,  $e^{-jz} = \cos z - j \sin z$ 。よって

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad (2.35)$$

$$= \cos(x + jy) = \frac{e^{j(x+jy)} + e^{-j(x+jy)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \{ e^{-y} (\cos x + j \sin x) + e^y (\cos x - j \sin x) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (e^y + e^{-y}) \cos x - j (e^y - e^{-y}) \sin x \}$$

$$= \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$$

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y \quad (2.36)$$

加法定理が成り立つ (P.53)

$$\cos(z_1 + z_2) = \frac{e^{j(z_1+z_2)} + e^{-j(z_1+z_2)}}{2} \quad \text{。一方}$$

$$\begin{aligned} & \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ &= \frac{e^{jz_1} + e^{-jz_1}}{2} \frac{e^{jz_2} + e^{-jz_2}}{2} - \frac{e^{jz_1} - e^{-jz_1}}{2j} \frac{e^{jz_2} - e^{-jz_2}}{2j} \\ &= \frac{e^{j(z_1+z_2)} + e^{j(z_1-z_2)} + e^{j(z_2-z_1)} + e^{-j(z_1+z_2)}}{4} + \\ & \quad \frac{e^{j(z_1+z_2)} - e^{j(z_1-z_2)} - e^{j(z_2-z_1)} + e^{-j(z_1+z_2)}}{4} \\ &= \frac{e^{j(z_1+z_2)} + e^{-j(z_1+z_2)}}{2} \end{aligned}$$

よって,

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

例 2.4 (P.54)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + j\right) = -\frac{e^{jj} - e^{-jj}}{2j} = \frac{e^{-1} - e}{2} j$$

$$\text{解} \leq (P.54) \quad (1) \quad \sin\left(\frac{\pi}{6} + j\right)$$

(2)  $\cos z = j$ ,  $\log(\quad)$  の () 内は正にすること

逆三角関数: 三角関数の逆関数として表示

$$f(z) = \sin^{-1} z, \cos^{-1} z, \tan^{-1} z$$

$$\text{解} \leq: \cos^{-1} z = w \rightarrow z = \cos w$$

## 2.5 双曲線関数

$$\text{定義} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (2.37)$$

$$e^z = \cosh z + \sinh z, \quad e^{-z} = \cosh z - \sinh z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

双曲線関数と三角関数の関係

$$\cos z = \cosh(jz) \quad \left( \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \cosh(jz) \right)$$

$$\sin z = -j \sinh(jz) \quad \left( \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = \frac{1}{j} \sinh(jz) \right)$$

$$\cosh z = \cos(jz) \quad \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{-j \cdot jz} + e^{j \cdot jz}}{2} \right)$$

$$\sinh z = -j \sin(jz) \quad \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -j \frac{e^{j \cdot jz} - e^{-j \cdot jz}}{2j} \right)$$

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh z$$

$$\text{例 2.5 (P.58)} \quad \cosh\left(1 + j\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{解} \leq (P.59) \quad \sinh\left(1 + j\frac{\pi}{3}\right), \quad \cosh z = 0$$

## 2.6 対数関数

指数関数の逆関数として定義

$$f(z) = w = e^z \text{ より, } z = \log w,$$

$$\text{変数を入れ替えて, } w = \log z \Leftrightarrow z = e^w$$

ただし,  $g(z) = \log z = \log(x + jy)$  で変数指数に変形

$$\log z = \log(re^{j\theta}) = \log r + j(\theta + 2n\pi) \quad (n \text{ 整数}) \quad (2.38)$$

変数を極座標表示すると偏角に対して周期性あり。

1 つの変数  $z$  に対して  $\log z$  は複数の値を取る:

$w = \log z$  は多価関数。(指数関数表示を使って)

$n=0$  の値を主値といい, 大文字で表示。

$$\log z = L \log z + j2n\pi$$

$$z=1 \text{ のとき } \log 1$$

なお 1 つの変数に対して 1 つの値: 一価関数

$$\text{例 2.6 (P.61)} \quad \log 1, \quad \text{解} \leq (P.61):$$

## 2.7 べき関数

一般べき

$$f(z) = z^c = (e^{\log z})^c = e^{c \log z} \quad (c \text{ 複素数}, z \neq 0) \quad (2.39)$$

多価関数,  $z^c = e^{c \operatorname{Log} z}$  を主値という

(i)  $c = n = 1, 2, \dots$  (正の整数)

$$z^n = (re^{j(\theta+2m\pi)})^n = r^n e^{jn\theta} \cdot e^{j2mn\pi} = r^n e^{jn\theta} \text{ — 単価関数}$$

(ii)  $c = n = -1, -2, \dots$  (負の整数)

$$z^n = (re^{j(\theta+2m\pi)})^n = r^n e^{jn\theta} \cdot e^{j2mn\pi} = r^n e^{jn\theta} \text{ — 単価関数}$$

(iii)  $c = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$  (べき乗根)

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = (re^{j(\theta+2m\pi)})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{j(\frac{\theta}{n} + 2\frac{m}{n}\pi)}$$

$(m = 0, 1, 2, \dots, n-1)$  多価関数

例 2.7 (P.63):  $j^j = \left( e^{j\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} \right)^j = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}, \quad (n \text{ 整数})$

解 (P.63):  $j^j = \left( \frac{1-j}{\sqrt{2}} \right)^{1+j}$

まとめ

- 複素関数は  $(u, v)$  を実関数とする)  

$$f(z) = w(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$$
- $(x, y)$  平面と  $(u, v)$  平面とは異なる
- 複素関数の級数定義 (指数, 三角関数等)  
 オイラーの公式 (複素数版)
- 周期性 ( $j2\pi$ ), 多価関数