講義にて配布した資料の抜粋・縮小版です

平成22年度
統計工学　講義資料（3）

～平均と分散Ⅱ：確率変数と確率分布～

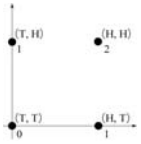
(C) Sadami SUZUKI

確率変数と分布

確率変数と確率分布

- 標本空間上で定義された実数値関数
- **確率的にその値が決まる変数（とり得る各値に対してそれぞれある一定の確率が与えられて（対応して）いるような変数）**

＜例＞
- コインを2回投げた時に表が出る回数 X を考える



x	0	1	2	計
$P[X=x]$	1/4	1/2	1/4	1

$$\mu = E[x] = \sum_x x \cdot p(x)$$

(C) Sadami SUZUKI

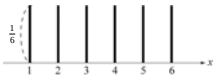
確率変数と分布

確率変数と確率分布

確率分布が**離散的**な場合・・・

- **とり得る値に対してそれぞれある一定の確率が対応する**

＜例＞
- サイコロを投げた時に出る目の数とその確率（一様分布）



x	1	2	3	4	5	6	計
$P[X=x]$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

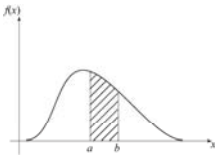
(C) Sadami SUZUKI

確率変数と分布

確率変数と確率分布

確率分布が**連続的**な場合・・・

任意の x に対して，$P[X=x]=0$



- **とり得る値の任意の区間に対してそれぞれある一定の確率が対応する**

確率密度関数の利用

$$P[a < x \le b] = \int_a^b f(x)dx$$

(C) Sadami SUZUKI

確率変数と分布

分布関数

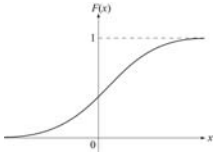
確率変数 X に対し，それがある値 x 以下の値をとる確率 $P[X \le x]$

$$F(x) = P[X \le x]$$

と x の関数とみなしたとき，これを分布関数という

【分布関数の性質】

1. 単調非減少　$a < b \Rightarrow F(a) \le F(b)$
2. 右連続　$\lim_{x \to a+0} F(x) = F(a)$
3. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1,\ \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$



(C) Sadami SUZUKI

確率変数と分布

確率密度関数

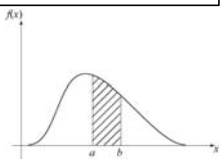
確率変数 X が連続値をとる場合，$F(x)$ が連続関数で微分可能であるならば確率密度関数 $f(x)$ は $F(x)$ の導関数として

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

により定義される

【確率密度関数の性質】

1. $f(x) \ge 0$
2. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
4. $P[a < x \le b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$



(C) Sadami SUZUKI

講義にて配布した資料の抜粋・縮小版です

平均値と分散

【確率分布が離散的な場合】

平均値 $\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p(x_i)$

分散 $\sigma^2 = V[X] = E\left[\{X - E[X]\}^2\right] = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - \mu)^2 p(x_i)$

【確率分布が連続的な場合】

平均値 $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$

分散 $\sigma^2 = V[X] = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 \cdot f(x)dx$

(C) Sadami SUZUKI

平均値と分散の性質

平均値

① データの1次変換と平均

$$E[aX+b] = aE[X]+b \qquad (a,b \text{ は定数})$$

② 任意の2つの確率変数に関する関係性

$$E[X+Y] = E[X]+E[Y]$$

- 任意の2つ以上の変数への拡張

$$E[X_1+X_2+\cdots+X_n] = E[X_1]+E[X_2]+\cdots+E[X_n]$$

(C) Sadami SUZUKI

平均値と分散の性質

分散

① データの1次変換と分散

$$V[aX+b] = a^2V[X] \qquad (a,b \text{ は定数})$$

② 任意の確率変数に関する関係性

$$V[X+Y] = V[X]+V[Y]+2Cov[X,Y]$$

※ $Cov[X,Y] = E[XY]-E[X]E[Y] \cdots X,Y$ の共分散

X,Y が互いに独立ならば $E[XY] = E[X]E[Y] \quad \therefore Cov[X,Y]=0$

③ 分散の加法性

X,Y が互いに独立ならば

$$V[X+Y] = V[X]+V[Y]$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ が互いに独立ならば

$$V[X_1+X_2+\cdots+X_n] = V[X_1]+V[X_2]+\cdots+V[X_n]$$

(C) Sadami SUZUKI

正規分布

確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

で与えられる分布を正規分布といい，平均値 μ および分散 σ^2 によって規定される

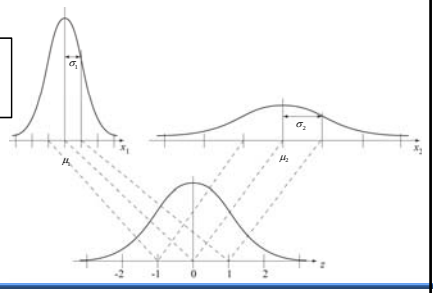
- 正規分布における平均値と分散
  - 平均値：位置のパラメータ
  - 分散：尺度のパラメータ

(C) Sadami SUZUKI

標準正規分布と基準化

- 平均が0，分散が1の正規分布を標準正規分布という

基準化



(C) Sadami SUZUKI

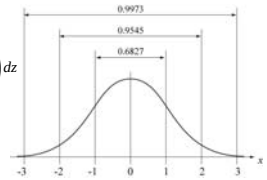
標準正規分布と確率

- 標準正規分布・・・数値的評価による**正規分布表**と呼ばれる数値表が与えられており，その任意の値に対する**確率密度の値**，および**任意の区間の間の値をとる確率**などを求めることが可能

確率密度関数

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-z^2/2\right) \qquad z \sim N(0,1^2)$$

$$P(k) = \int_k^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-z^2/2\right)dz$$



(C) Sadami SUZUKI