生体工学第一　　　　　　　　2010.4.28

第４回講義内容

１．出席点の問題の解説（動物の鼓動数について）

２．フラクタルの説明（宿題の解説）

３．枝分かれの法則

3.1　樹木の枝分かれ（2.5乗則の復習）

3.2　血管の３乗則

４．血管の適応フィードバック

５．ホームワーク（血管の分岐角度）

樹木の枝の分岐則（2.5乗則）

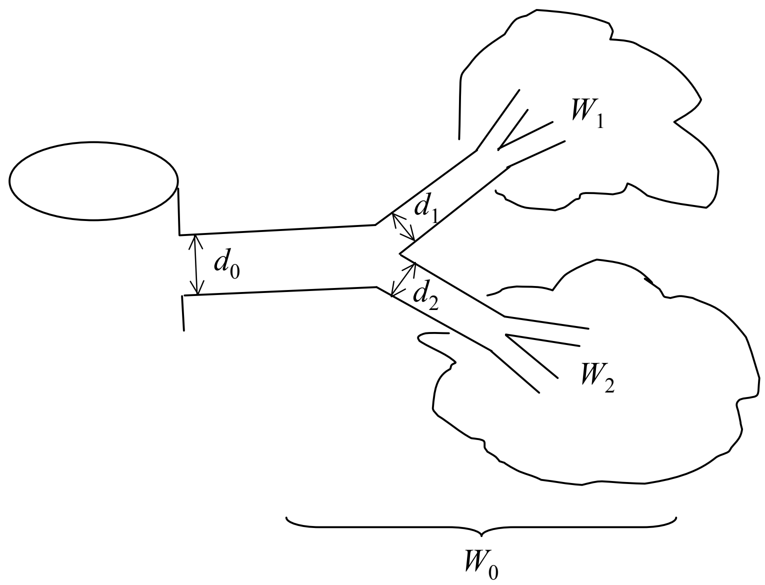
枝の重量と直径の関係

$$W \propto d^{2.5}$$

分岐した枝の関係

$$d_0^{2.5} = d_1^{2.5} + d_2^{2.5}$$

C.D.Murray(1927)



血管分岐の法則（３乗則）

$$r_0^n = r_1^n + r_2^n \qquad n = 2.8〜3.2$$

C.D.Murray(1927)

フラクタルモデルでは，n=2と仮定した．指数が２と３でどんな違いが出るのか．

n=2ならば分岐後も同じ流速になる．

では，n=3の場合には分岐後の流速はどうなる？

フラクタルモデルでは血管分岐は2乗則ではなかったか？

※分岐後の血管断面積の和は分岐前の血管断面積に等しいと仮定している.

血管分岐の法則（３乗則）

$$r_0^n = r_1^n + r_2^n \qquad n = 2.8 \sim 3.2$$

C.D.Murray(1927)

血液供給は諸器官の活動を維持するのに必須.
→多すぎると無駄，少なすぎると支障
→したがって生命維持には適度な血液流量が必要
→何らかの法則性が成立していると予想.

Murray の最小仕事モデル

基本的な考え方（一本の血管について考える）

・血管半径が小さすぎると

→粘性抵抗が増大→機械的エネルギーが増大．（not good）

→管内血液が減少→化学的エネルギーが減少．（good）

・血管半径が大きすぎると

→粘性抵抗が減少→機械的エネルギーが減少．（good）

→管内血液が増大→化学的エネルギーが増大．（not good）

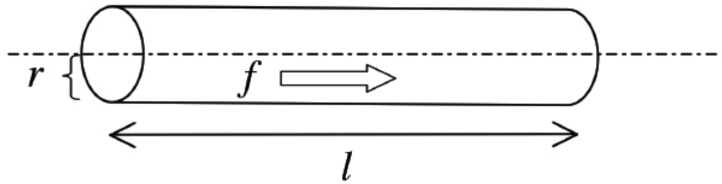
※化学的エネルギー：血管内の血液を活性化させておくのに必要なエネルギー．管内血液量に比例（小さい方がよい）．

機械的エネルギーE_mと化学的エネルギーE_cの総和の最小化

Murray の最小仕事モデル（続き）

$$F = E_m + E_c = \Delta p f + kV$$ （k は定数）

$$f = \frac{\Delta p}{l}\frac{\pi r^4}{8\mu}$$ より



$$F = \frac{8\mu f^2 l}{\pi r^4} + k\pi r^2 l$$

仮定：血管内はポアズイユ流れ

（両端の圧力差をΔpとする．）

F の最小値を求めるために F を r で偏微分する

と以下の関係式が得られる.

[redacted] $= \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{k}{\mu}} = const.$

←この計算が出席点

機械的エネルギー E_m

Δpf　が単位時間当たりの機械的エネルギーに相当する理由

◎仕事は Fx で定義される.

◎断面積Aの管内の流体がΔtにΔxだけ押し出されている状況を考える.

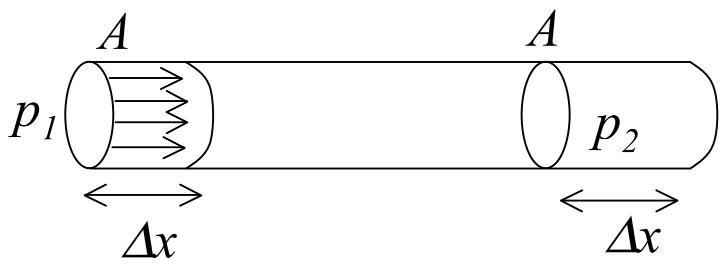
入口側で液体に対してなされる仕事は $p_1 A\Delta x$.
出口側の面では，圧力　p_2 が常に加わっている状態なので，
流体が外部に対して行う仕事は $p_2 A\Delta x$.
したがって，管内で流体の運動に必要なエネルギーは

$$p_1 A\Delta x - p_2 A\Delta x = (p_1 - p_2) A\Delta x = \Delta p A\Delta x$$

単位時間当たりでは

$$\Delta p A\Delta x/\Delta t = \Delta pf$$

となる.



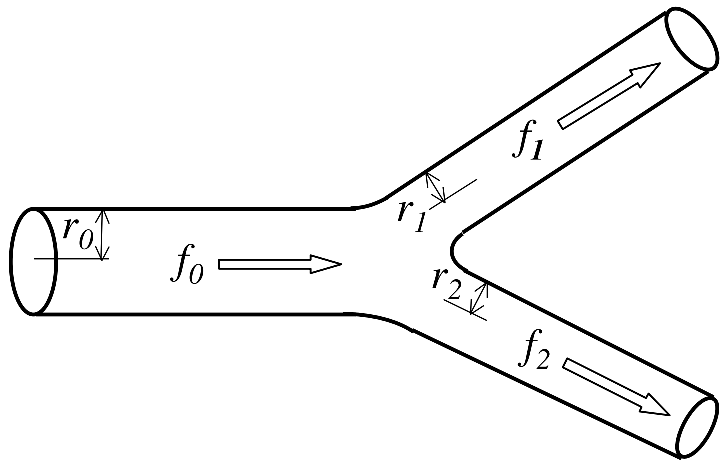
Murray の最小仕事モデル（続き）

入口側，出口側の流量を f_0, f_1, f_2 とすると

$$\frac{f_0}{r_0^3} = \frac{f_1}{r_1^3} = \frac{f_2}{r_2^3}$$

$f_0 = f_1 + f_2$　より

$$r_0^3 = r_1^3 + r_2^3$$



血管の適応フィードバック

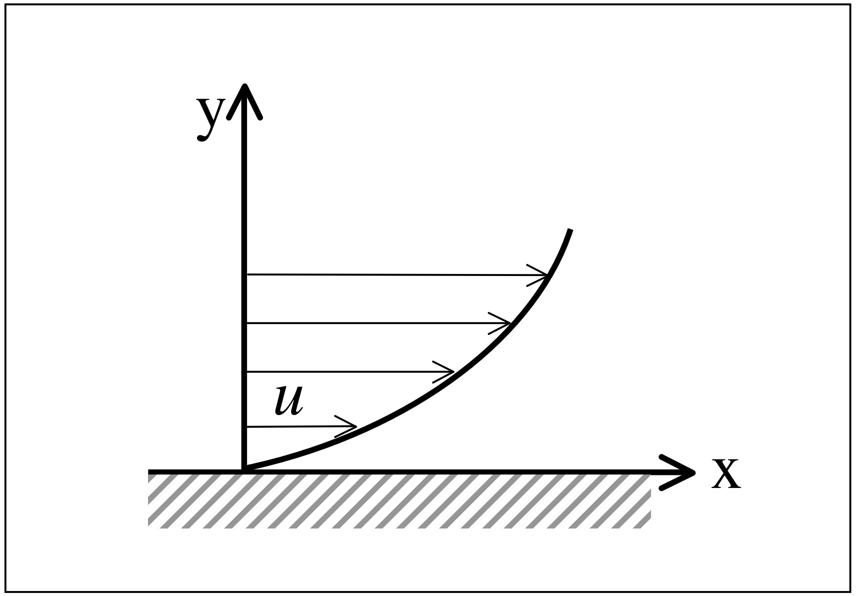
血管の３乗則は血管半径の大小を問わず成立.

→血管自身が血流を把握する機能があるはず.

→学説：血管内壁に作用するずり応力を検出（神谷ら，1980）

ずり応力

$$\tau = \frac{du}{dy} \cdot \mu$$

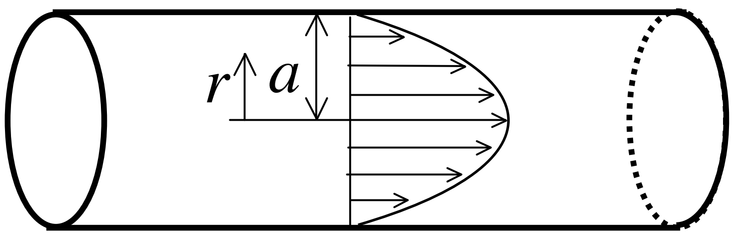


円管内ずり応力の導出

管内流れ　$u = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{1}{4\mu}a^2\left\{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}$

$f = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{\pi a^4}{8\mu}$　の関係から

$$u = \frac{2f}{\pi a^2}\left\{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}$$



$\tau = \mu \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=a} =$ [redacted]　←この計算が出席点

（上図の座標の取り方に注意．）

生体工学第一　　　　　　　　　2010.4.28

第４回講義内容

１．出席点の問題（動物の鼓動数について）

２．フラクタルの説明（宿題の解説）

３．枝分かれの法則

3.1　樹木の枝分かれ（2.5乗則の復習）

3.2　血管の３乗則

４．血管の適応フィードバック

５．ホームワーク（血管の分岐角度）

第４回講義おわり