

## 第2回講義内容

1. 出席点の問題：枝の2.5乗則（出席点）
2. 前回ホームワーク（英文和訳）の解説
3. 基礎代謝率
4. 0.75乗則：熱放散による説明（前回の復習）
5. 0.75乗則：二つの学説
  - 5.1 弾性相似則モデル
  - 5.2 フラクタルモデル（次回に講義）

# 出席点：枝の2.5乗則を示せ

枝の重量と  
直径の関係

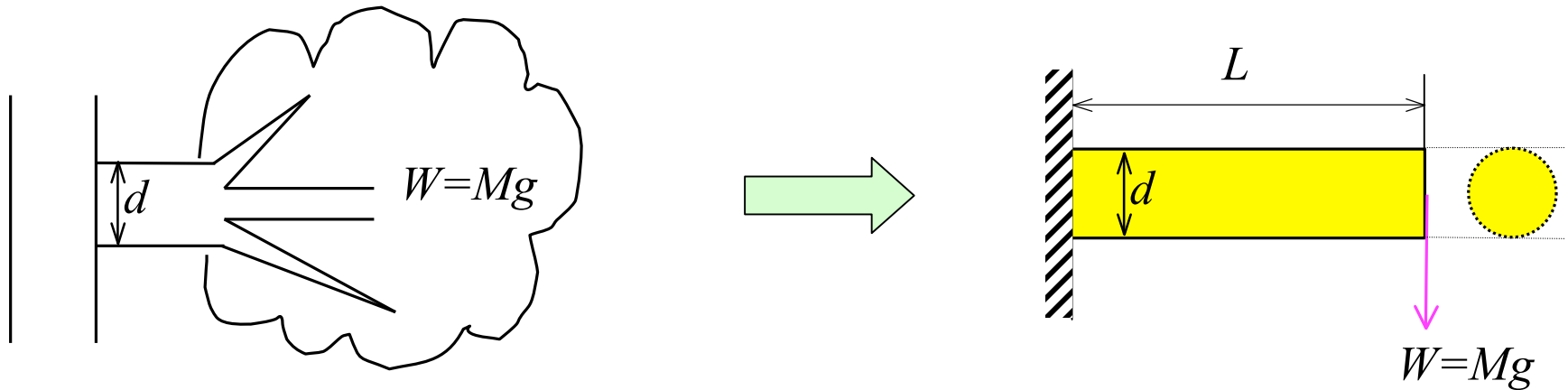
$$W \propto C^{2.5}$$



$$M \propto d^{2.5}$$

配付資料  
Murray, 1927

# 枝の力学モデル



$$\sigma = \frac{MgL}{Z} = \frac{WL}{Z} \quad (1)$$

$$Z = \text{断面係数} \quad (2)$$

$$W = Mg = \frac{\pi d^2}{4} L \rho g \quad (3)$$

Mとdの関係式  
(Lは消去される)

$\rho$  : 枝を直はりとしてモデル化したときの  
平均質量密度 [kg/m<sup>3</sup>]

# 樹木の枝の分岐則（2.5乗則）

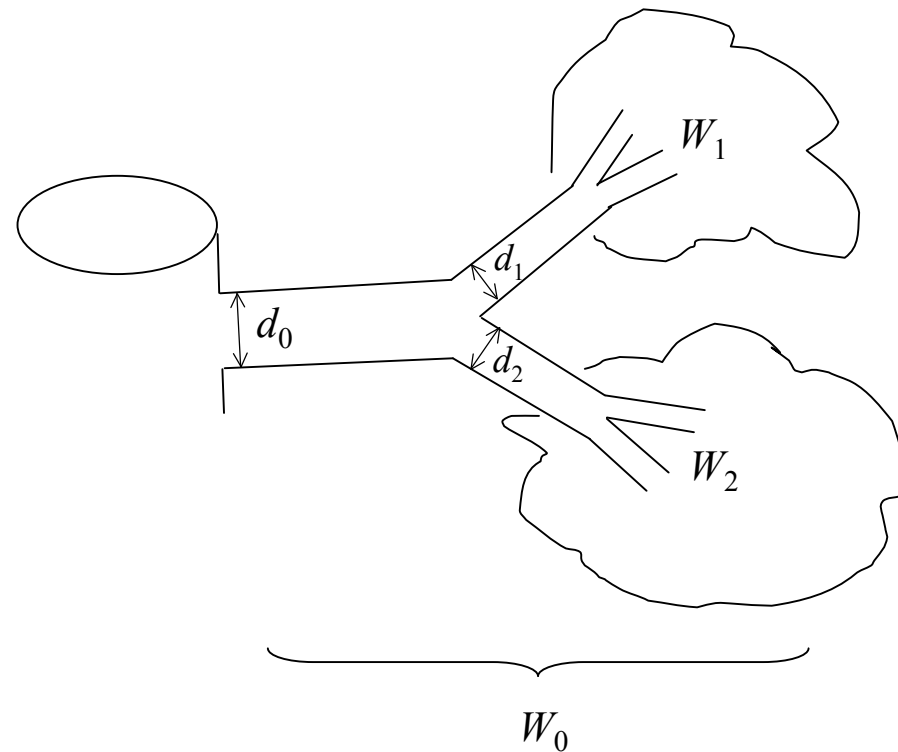
枝の重量と直径の関係

$$W \propto M \propto d^{2.5}$$

分岐した枝の関係

$$d_0^{2.5} = d_1^{2.5} + d_2^{2.5}$$

C.D.Murray(1927)



## 2. 5乗則の導出

### 枝を片もちはりでモデル化

式の導出にどんな仮定が設定されているか

- 枝の強度を曲げ応力で評価
- 枝は幹に対して垂直(→別の角度ならどうなる?)
- 枝は円柱形(断面形状はどこも同じ)
- 枝は相似形(葉の付き方はどの木もほぼ同じ)
- 木材は均質で材質、密度は木の種類によらず同じ

# 第1回の宿題（英文和訳）の解説

## 復習

### スケーリング（Scaling）

対象物の大きさによって、特性（移動速度、消費エネルギーなど）がどのように影響するかを探ること。対象物がどのように設計されているかという基本法則を知ることができる。

アロメトリー（allometry）： $y=ax^b$  で表される関係式が利用される。

# アロメトリーの解釈の注意

体重が大きい方が寿命が長いかな？

長寿の人は、一般にやせている人が多いように思う。  
霊長類では、係数が異なると考えれば体重がある人の方が長生きになるのだろうか。

ほ乳類 
$$t_{life} = 11.8 M_b^{0.20}$$

上式は種の間関係を示しているが種内については対象外。  
(人という同一の種で体重と寿命を議論することはできない。)

ちなみにチワワとセントバーナード犬では、チワワの方が長生きである。

# 鼓動のアロメトリー式

宿題の文章には鼓動に関する記述がある. 記載された数値から鼓動に関するアロメトリー式を議論できる.

|        |            |            |
|--------|------------|------------|
| トガリネズミ | 1000回/min. | 体重 2-3 グラム |
| ゾウ     | 30回/min.   | 体重 5 トン    |
| ハツカネズミ | 600回/min.  | 体重 30グラム   |

どのようなアロメトリー式だろうか.

(インターネットで調べるとゾウの鼓動は25-28回程度とある)

# 動物の代謝率：0.75乗則

生物の質量 $M_b$ と安静時の単位時間当たりの代謝エネルギー $P$ との間には、両対数軸上できれいな線形関係が成立している。

From *Scaling*,  
K.S.Nielsen

# 人の代謝エネルギー

## 年齢別基礎代謝量とエネルギー所要量

| 年齢    | 基礎代謝量<br>kcal/日 (男/女) | エネルギー所要量<br>kcal/日 (男/女) |
|-------|-----------------------|--------------------------|
| 18～29 | 1,550/1,210           | 2,000/1,550              |
| 30～49 | 1,500/1,170           | 1,950/1,500              |
| 50～69 | 1,350/1,110           | 1,750/1,450              |
| 70 以上 | 1,220/1,010           | 1,600/1,300              |

出典：「第 6 次改訂日本人の栄養所要量について」厚生労働省  
「2002 新食品成分表 FOODS」一橋出版  
(<http://www2.health.ne.jp/library/3000/w3000657.html>)

$$1550 \times 1000 \div (60 \times 60 \times 24) \div 18 \text{ [cal/sec]}$$

# 基礎代謝率と生物の質量の関係

$$P \propto M_b^{0.75} \quad 0.75\text{乗則}$$

単位質量あたりでは

$$P_u \propto M_b^{-0.25}$$

# 熱放散の考え方では指数はいくつになるか.

まず, 生物の形を球体(半径  $r$ )と仮定して指数を求める.

考え方:

生物の質量 $M_b$ は $r^3$ に比例

身体から出る熱量は表面積 $S$ に比例. ( $S$ は $r^2$ に比例)

単位時間当たりの熱量が基礎代謝率 $P$ に比例.

$P$ と $M_b$ の関係から指数は...

生物の形を円柱と仮定したら0.75になるのでは?

結論: 体表面積が最小となる条件下でも0.75乗則は説明できない.

## 第2回講義内容

1. 出席点の問題：枝の2.5乗則（出席点）
2. 前回ホームワーク（英文和訳）の解説
3. 基礎代謝率
4. 0.75乗則：熱放散による説明（前回の復習）
5. 0.75乗則：二つの学説
  - 5.1 弾性相似則モデル
  - 5.2 フラクタルモデル（次回に講義）

# どうやって0.75乗を説明するのか？

なるべく多くの動物に共通する現象で説明したい.

→ それが可能ならば, より説得力が出る.

→ 学説として価値があると評価される.

## 「弾性相似則モデル」は何に注目したのか？

# 指数0.75の導出

McMahon（1973年）の学説

基本的な考えかた：

地上（重力下）で動物が体軀の形状を維持するには  
筋肉を活動させる必要があり、これが基礎代謝率に  
関係していると考える。（胴体が大きければ、筋肉  
の断面積も増えるが質量も増加する。胴体を弾性体  
と仮定すると、動物の胴体の長さ $L$ と質量 $M$ の間には、  
折れ曲がりにくさに関して相似的な関係があると予  
想される。）

# 弾性相似則を適用

身体の折れ曲がりにくさを数式で表現

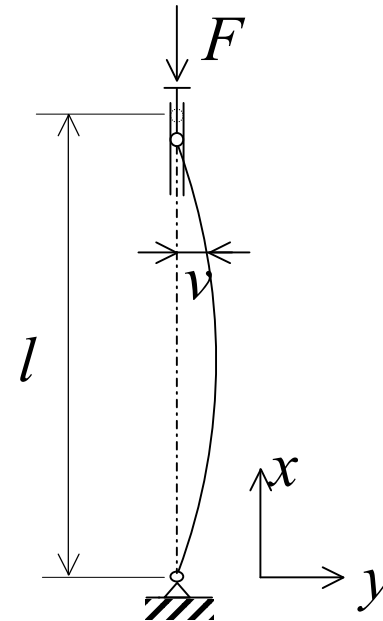


弾性はりの座屈条件を利用

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$E$ : ヤング率

$I$ : 断面二次モーメント



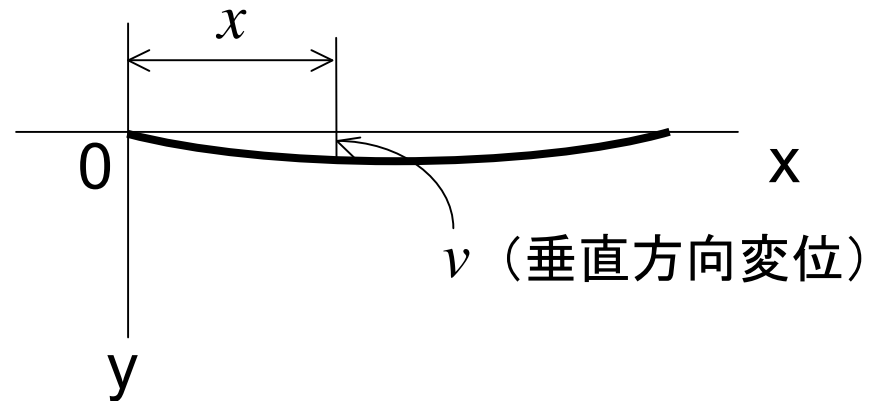
# 座屈条件の導出

## はりのたわみの方程式

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$EI$ : 曲げ剛性

曲げモーメントの正方向



なぜ  $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$  となるのか？

軸線から  $y$  離れた箇所でのひずみは  $\frac{y}{r} = \varepsilon$

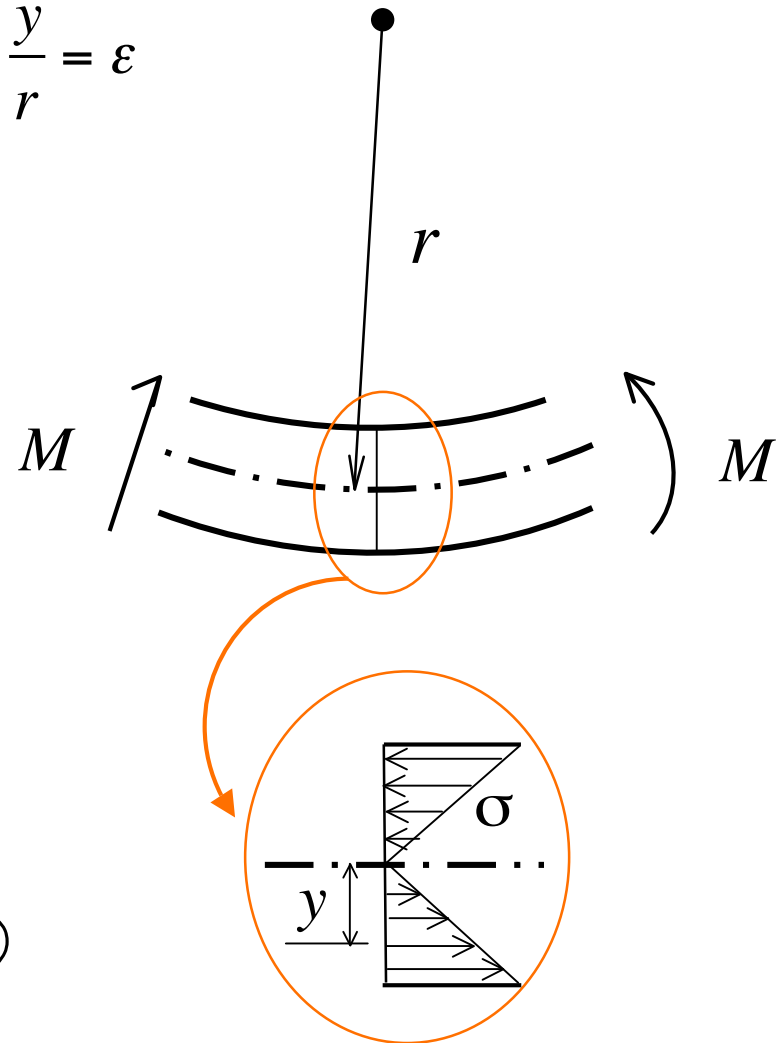
応力は  $\sigma = E\varepsilon = \frac{y}{r}E$

したがってモーメント  $M$  は

$$M = \int_A \sigma y dA = \frac{E}{r} \int_A y^2 dA = \frac{EI}{r}$$

一方、曲率半径の式は

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{d^2v}{dx^2} \quad (\text{変形が小さい場合})$$

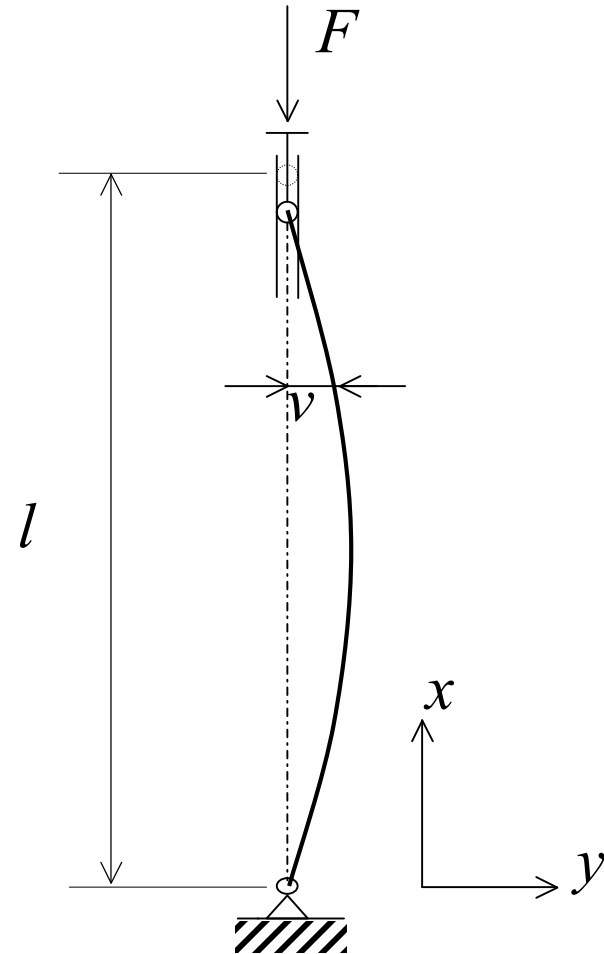


# 座屈条件の導出（続）

はりを縦方向にして考える

内力と外力とのつりあいの条件式を考えると、次式のようになる.

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv = 0$$



# 座屈条件の導出（続）

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv = 0$$

微分方程式の解

$$v = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

$$\text{ここで } \alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

境界条件

$$x=0 \text{ で } v=0 \rightarrow C_1 = 0$$

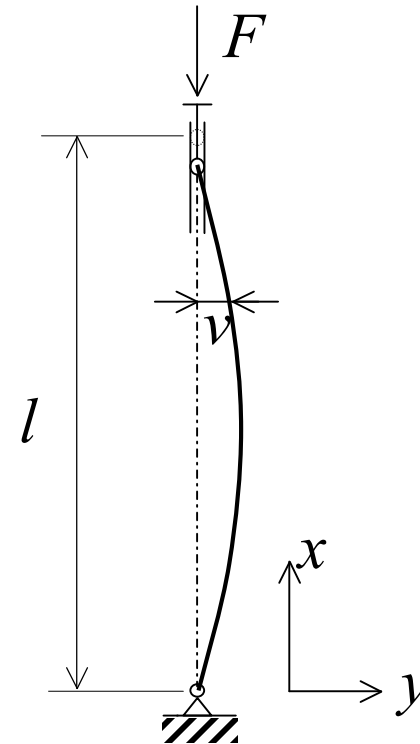
$$x=l \text{ で } v=0 \rightarrow C_2 \sin \alpha l = 0.$$

2番目の境界条件で  $C_2 = 0$  は意味がない.

$\rightarrow \alpha l = m\pi$  ( $m$ は整数) が成立する必要がある.

$$F = m^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$m=1$  のときオイラーの座屈条件という.



# 弾性相似則（続き）

$F$  は胴体の重量に比例すると仮定

$$F \propto \pi d^2 l \rho g$$

$\rho$  : 見かけ上の密度

$g$  : 重力加速度

$d$  : 胴体の直径

座屈しない限界長さ  $l_k$  と直径  $d$  の関係

$$l_k^3 \propto d^2$$

胴体質量 ( $l_k d^2$ ) は全体の質量  $M_b$  に比例すると仮定すると

$$d \propto M_b^{\frac{3}{8}}$$

# 筋肉の活動

身体が座屈しないように胴体の筋肉が活動（収縮）する仕事量を見積もる.

筋肉の仕事量

$$W \propto \sigma A \Delta l$$

$\sigma$  : 筋肉の単位面積  
あたりの収縮力

単位時間当たり

$$P \propto \sigma A \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

$A$  : 筋肉の断面積

$\Delta l$  : 収縮長さ

$\Delta t$  : 収縮時間

筋肉の収縮力, 収縮速度は一定と仮定

$$P \propto M_b^{\frac{3}{4}}$$

## 0.75 乗則を導き出すために必要な仮定

- 基礎代謝量に重力が関与している。  
(身体の姿勢を維持するエネルギーに関係)
- 動物の胴体は弾性体で近似できる。  
(材料が一様な円柱とみなすことができる。)
- 胴体の折れ曲がりにくさにオイラーの座屈条件を適用可能である。
- 座屈条件の荷重は生物体の質量に比例する。
- 筋肉の動作特性はどの動物も同じ。
- 生物全体の質量は胴体の質量に比例。

## 0.75乗則：もう一つの学説

G. B. West, J. H. Brown and B. J. Enquist,  
Science, Vol. 276, pp. 122–126 (1997)

次回の講義で紹介

## 第 2 回講義おわり