

第 11 回 固有値と対角化

無機材料工学科

安田公一作成

1. 固有値と固有ベクトル

正方行列 A に対して、あるスカラー λ があって、

$$Av = \lambda v \quad (1)$$

を満たす 0 でないベクトル v がある時、この λ のことを A の固有値と言い、ベクトル v のことを固有ベクトルと言う。

ここで、話を簡単にするために、2 次行列で考えると、適当な条件(固有方程式が異なる 2 根を持つという条件)を満たす行列 A には、このような固有ベクトルが 2 方向取れて、それらを v_1, v_2 とし、それらに対応する固有値を λ と μ とすれば ($\lambda \neq \mu$ とする)、

$$Av_1 = \lambda v_1, \quad Av_2 = \mu v_2 \quad (2)$$

となる。2 方向取れるというのは、 v_1, v_2 を独立に取れて、 $|v_1, v_2| \neq 0$ ($\lambda \neq \mu$ であれば成り立つ) という意味である。この時、任意のベクトル $v = {}^t(x, y)$ は、 v_1, v_2 を基底として使って、

$$v = sv_1 + tv_2 = [v_1, v_2] \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad (3)$$

のように 1 通りに表される。そして、(2)式と(3)式より、 v_1, v_2 が固有ベクトルであれば、新しい st 座標では、行列 A の作用は、単に、座標軸 v_1 方向には、座標値 s を λ 倍することであり、座標軸 v_2 方向には、座標値 t を μ 倍することになる。これは、

$$\begin{aligned} Av &= A(sv_1 + tv_2) \\ &= sAv_1 + tAv_2 \\ &= s\lambda v_1 + t\mu v_2 \end{aligned} \quad (4)$$

ということからわかる。この式は、

$$A[v_1, v_2] \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = [v_1, v_2] \begin{pmatrix} \lambda s \\ \mu t \end{pmatrix} \quad (5)$$

と書き直すことができ、さらに、右辺を式変形すると、

$$A[v_1, v_2] \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad (6)$$

となり、 s と t は任意のベクトル v の座標なので、両辺から除いて考えると、

$$A[v_1, v_2] = [v_1, v_2] \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (7)$$

と表される。さらに、 $|v_1, v_2| \neq 0$ より、 $[v_1, v_2]^{-1}$ があるので、これを両辺の左から掛けて、

$$[v_1, v_2]^{-1} A[v_1, v_2] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (8)$$

元々の xy 座標では、線型変換を表す行列が A であったが、それを v_1, v_2 を基底とする st 座標にすると、線型変換の表現行列が $[v_1, v_2]^{-1} A[v_1, v_2]$ となり、これを具体的に計算すると、

λ と μ を対角成分とする対角行列になるという訳である。線型変換後は、対角行にだけ要素があるということは、 v_1, v_2 の方向にだけスカラー倍されるということを表している。このように、固有ベクトルを使って、座標軸の方向を固有ベクトルの方向に合わせ、線型写像の行列を対角行列とすることを対角化という。

2. 固有ベクトルによる対角化の幾何学的意味

適当な行列 A の固有値と固有ベクトルを求め、固有ベクトルを並べた行列 P を使って、 $P^{-1}AP$ を作ると行列 A が対角化することは、これまでに、演習問題で経験したことがあると思う。ここでは、2次曲線 ($ax^2+2bxy+cy^2=z$) を2次形式で表した後に、その表現行列を対角化して、その幾何学的意味を考えてみる。

(以下省略)

3. 重根の場合でも対角化できる場合

行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ が対角化できるかどうか調べてみる。

まず、固有方程式を作ると、

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(4-\lambda)(1-\lambda) + 4 + 4 - 2(4-\lambda) + 4(1-\lambda) - 2\lambda \\ &= (1-\lambda)\{-4\lambda + \lambda^2 + 4\} + 8 - 8 + 2\lambda - 2\lambda \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

これより、固有値は 1 と 2 で、それぞれ多重度も 1 と 2 になる。 $v = {}^t(x, y, z)$ として、

$$(A - \lambda E)v = (A - \lambda E) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ に固有値をそれぞれ入れて、固有ベクトルを求める。}$$

$\lambda=1$ の場合、固有ベクトルを求めると

$$(A - 1E) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので、第1行から、 $x - y - z = 0$ 、第2行から $y + 2z = 0$ が得られ、 $x = y + z$ と $y = -2z$ とできるので、 $x = -2z + z = -z$ と $y = -2z$ から、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が固有値 1 の固有ベクトルである。

$\lambda=2$ の場合、固有ベクトルを求めると

$$(A - 2E) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので、第1行から、 $2x - y - z = 0$ が得られ、 $x = (y + z) / 2$ とできるので、 $x = (y + z) / 2$ と y と z は任意パラメーターとして、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y+z}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

が固有値 1 の固有ベクトルの一般形であるので、平行なベクトルとならないように注意して、 $y = z = 1$ の場合と $y = -z = 1$ の場合を採用し、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が固有値 2 の固有ベクトルとなる。これで、独立な固有ベクトルが3つ選べたので、それらを並べて、

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

とすると、 $|P| = 1$ となる。行の基本変形で、 P の逆行列 P^{-1} を作ると

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となって対角化できた。