

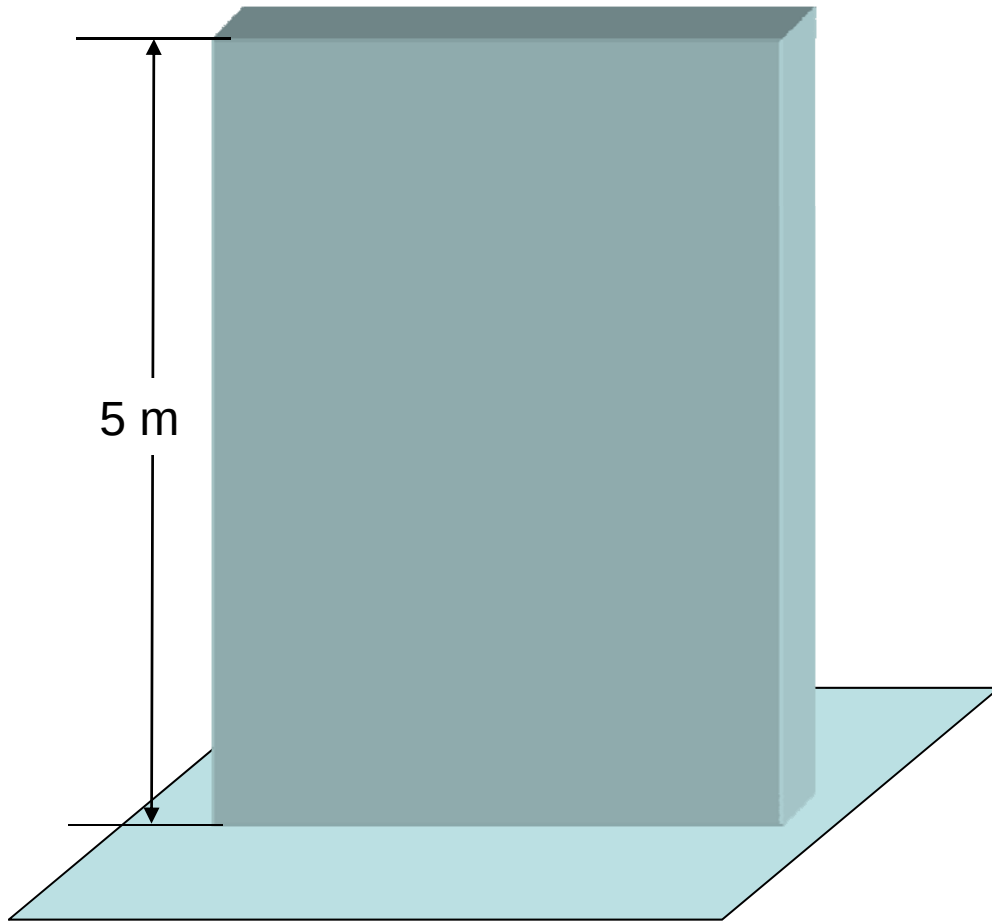
	彈性	粘性	粘彈性
微視的			
巨視的		●	

巨視的な粘度－具体的な粘度の値

気体	10	$\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$
液体(水)	1	$\text{mPa}\cdot\text{s}$
溶融ポリマー	1	$\text{kPa}\cdot\text{s}$
ガラス(800°C)	10	$\text{kPa}\cdot\text{s}$
液体と固体の境界	1	$\text{TPa}\cdot\text{s}$
ガラス(常温), コンクリート	10~100	$\text{PPa}\cdot\text{s}$

指数	接頭語	読み	指数	接頭語	読み
10^{18}	E	エクサ	10^{-3}	m	ミリ
10^{15}	P	ペタ	10^{-6}	μ	マイクロ
10^{12}	T	テラ	10^{-9}	n	ナノ
10^9	G	ギガ	10^{-12}	p	ピコ
10^6	M	メガ	10^{-15}	f	フェムト
10^3	K	キロ	10^{-18}	A	アト

Quiz



高さ5mのガラス板が垂直に立っているとする

ガラスの粘度 : 10^{16} Pa s

ガラスの密度 : 2.5 g/cm^3

問1 ガラス板の底の部分が自重で1%縮むのにどのくらいの時間がかかるか？

問2 ガラス板の高さの時間変化を表す式を示せ

Quizの答え

圧縮応力 $500 \times 2.5 \times g = 12.25 \text{ N/cm}^2 = 12.25 \times 10^4 \text{ Pa}$

ひずみ速度 $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} = \frac{12.25 \times 10^4}{10^{16}} \approx 10^{-11} \text{ s}^{-1}$

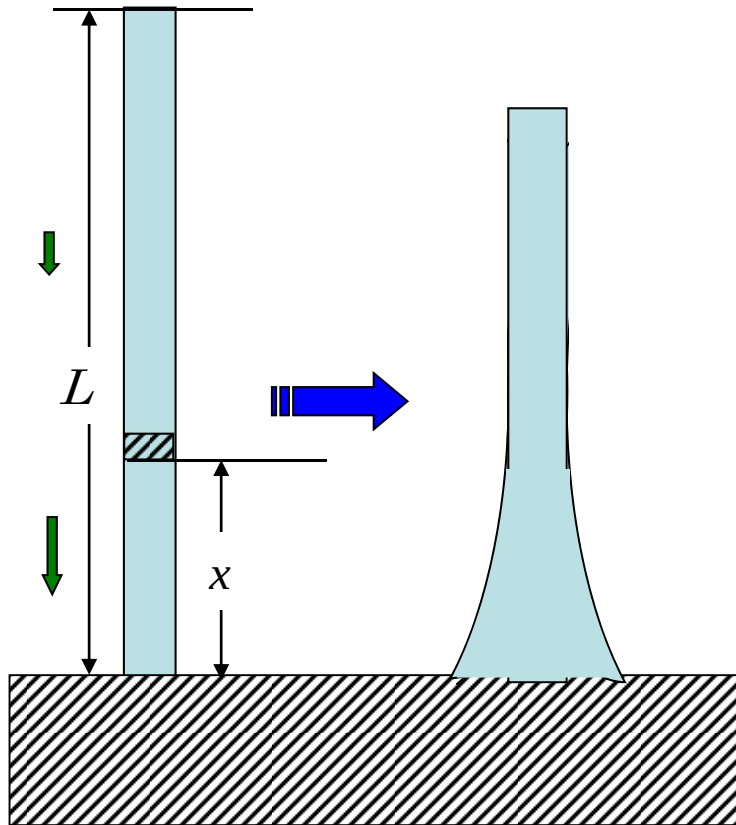
1年間は約3千万秒 $3 \times 10^7 \text{ s/year}$

ひずみ速度 $3 \times 10^{-4} \text{ year}^{-1}$

3000年でひずみが1

30年でひずみが1%

粘性体の自重による変形



微小領域に加わる荷重

$$\rho g A_0 (L_0 - x)$$

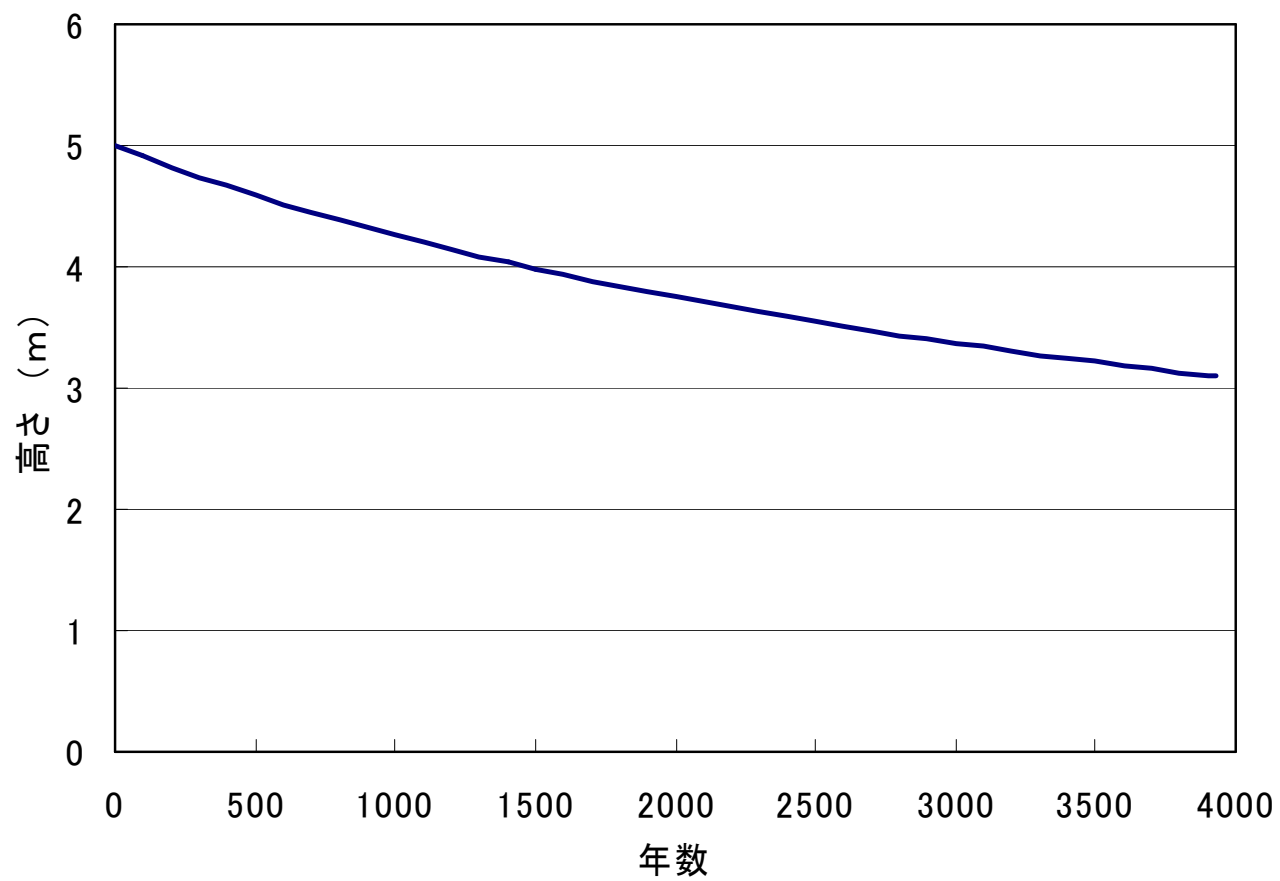
微小領域のひずみ速度

$$\eta \frac{1}{\ell} \frac{d\ell}{dt} = \frac{\rho g A_0 (L_0 - x)}{A}$$

時刻 t における局所ひずみ

$$\frac{\ell}{\ell_0} = \frac{\eta}{\eta + \rho g (L_0 - x)t}$$

$$\text{全長} = \int_0^{L_0} \frac{\ell}{\ell_0} dx = \frac{\eta}{\rho g t} \ln\left(1 + \frac{\rho g t}{\eta} L_0\right)$$



巨視的な粘性

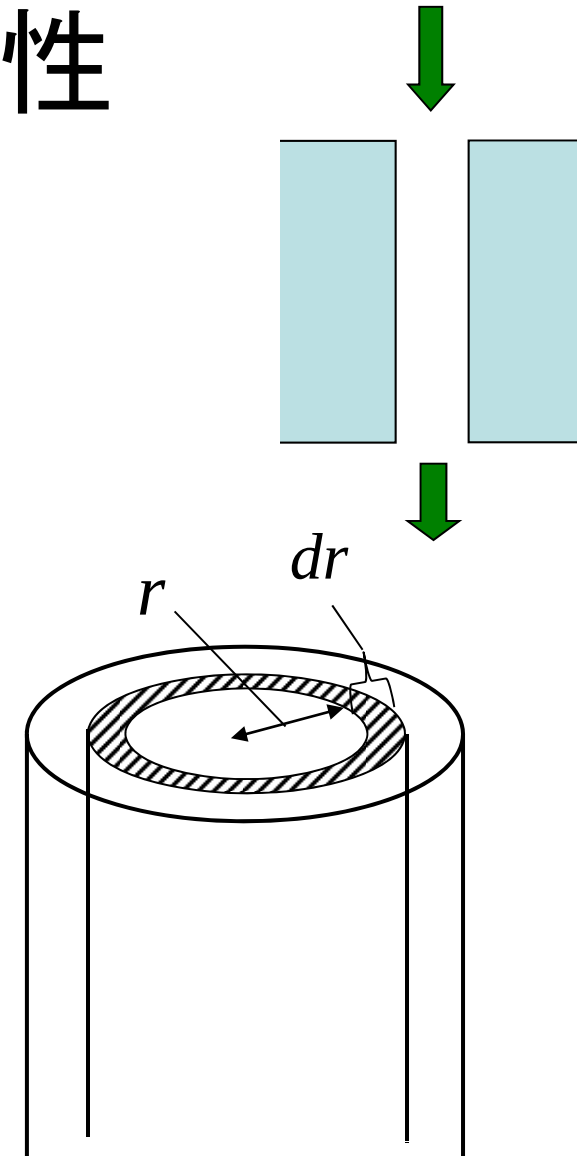
- 円管内の流れ
速度分布

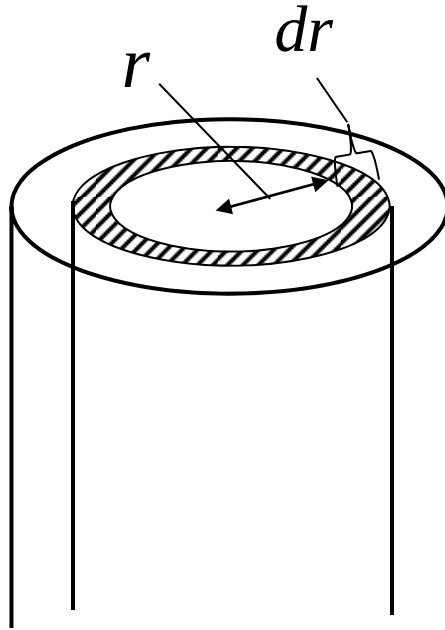
$$u = \frac{\Delta P}{4L\eta} (R^2 - r^2)$$

体積流量

ハーゲン ポアゼーユの式
Hagen Poiseuilleの式

$$Q = \frac{\pi \Delta P}{8L\eta} R^4$$





中心から r で 速度 u

中心から $r+dr$ で 速度 $u+(du/dr)dr$

半径 r の円筒側面に作用する力

$$-2\pi r L \eta \frac{du}{dr}$$

半径 $r + dr$ の円筒側面では

$$2\pi(r + dr)L\eta\left(\frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2}dr\right)$$

両者を合わせると

$$2\pi L \eta \left((r + dr) \left(\frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2} dr \right) - r \frac{du}{dr} \right)$$

$$= 2\pi L \eta \left(r \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} \right) dr$$

$$= 2\pi L \eta d \left(r \frac{du}{dr} \right)$$

円筒の端面から受ける力

$$\Delta P 2\pi r dr$$

定常流だから

$$2\pi L \eta d\left(r \frac{du}{dr}\right) + \Delta P 2\pi r dr = 0$$

$$d\left(r \frac{du}{dr}\right) = -\frac{\Delta P}{L \eta} r dr$$

積分すると

$$r \frac{du}{dr} = -\frac{\Delta P}{2L \eta} r^2 + C$$

$$r=0 \text{ で } \frac{du}{dr} = 0 \text{ だから } C = 0$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\Delta P}{2L \eta} r$$

もう一度積分すると

$$u = -\frac{\Delta P}{2L \eta} \frac{r^2}{2} + C$$

管壁 ($r=R$) で $u=0$ だから

$$C = -\frac{\Delta P}{4L \eta} R^2$$

$$u = \frac{\Delta P}{4L \eta} (R^2 - r^2)$$

これから学ぶ粘性論

- 流体力学
Navier-stokesの方程式

運動方程式

+ニュートン流体のレオロジー方程式

Navier-stokes の方程式から
Hagen-Poiseuilleの式を導く

流体力学

運動方程式

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho K_i + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}$$

ニュートン流体の
レオロジー方程式

$$T_{ij} = -(p + \frac{2}{3} \mu I_e) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

Navier-Stokesの方程式

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ &= \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nu \Delta \mathbf{v} \end{aligned}$$

N-S方程式
円柱座標
z方向成分

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ &= K_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned}$$

流体力学

N-S方程式
圆柱坐标
z方向成分

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = K_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \right)$$

定常状态, 圆柱对称

$$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \quad v_\theta, \quad v_r = 0, \quad K_z = 0$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Delta P}{L} \quad \Rightarrow \quad d\left(r \frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta P}{\eta L} r dr$$