テーマ４：平均時計算量の解析

本日の講義の目的

- NP 困難性の速成コース
- 3SAT 問題を平均的に多項式時間で解くアルゴリズムの紹介

1.1. NP 問題，NP 困難性

NP 問題とは，yes/no の判定問題で，yes の場合には，その証拠があり，証拠（の候補）を与えられれば，それが正しい証拠か否かを判定するのが（計算論的に）簡単な問題である．

以前（テーマ２）は例で説明したが，今回は正確な定義（とその変形版）を紹介しよう．なお以下では，論理式の真偽値を，1（真）と 0（偽）で表すことにする．

定義 1.1. 2 進列 $\{0,1\}^*$ 上の 2 値関数 $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ で，次の条件を満たす多項式 $q(\cdot)$ と多項式時間計算量を持つ証拠判定アルゴリズム $\mathtt{R}$ が存在するとき，f を NP 型判定関数と呼ぶ．

$$
\begin{aligned}
&\text{任意の } x \in \{0,1\}^* \text{ に対し（} n = |x| = x \text{ の長さとする）}\\
&\quad f(x) = 1 \iff \exists w \in \{0,1\}^* : |w| = q(n)\ [\ \mathtt{R}(x,w) = 1\ ],\ \text{ and}\\
&\quad f(x) = 0 \iff \forall w \in \{0,1\}^* : |w| = q(n)\ [\ \mathtt{R}(x,w) \neq 1\ ].
\end{aligned}
$$

こうした NP 型判定関数によって判定される判定問題を一般に NP 問題という．技術的には「アルゴリズム」というだけでは曖昧な点があり，厳密にする必要がある．そのため，ここでは回路族を用いた定義を考える．（注：厳密には単なる回路族でななく「一様回路族」を用いるべきだが，ここではその説明は省略する．）

定義 1.2. 2 進列 $\{0,1\}^*$ 上の 2 値関数 $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ で，次の条件を満たす多項式 $q(\cdot)$ とパラメータ n に対して多項式素子数の回路族 $\{C_n\}_n$ が存在するとき，f を NP 型判定関数と呼ぶ．

$$
\begin{aligned}
&\text{任意の } x \in \{0,1\}^* \text{ に対し（} n = |x| = x \text{ の長さとする）}\\
&\quad f(x) = 1 \iff \exists w \in \{0,1\}^* : |w| = q(n)\ [\ C_n(x,w) = 1\ ],\ \text{ and}\\
&\quad f(x) = 0 \iff \forall w \in \{0,1\}^* : |w| = q(n)\ [\ C_n(x,w) \neq 1\ ].
\end{aligned}
$$

このように定義すると 3SAT 問題の NP-困難性を示すことができる．まず，3SAT 問題の定義から．

3SAT 問題
入力： n 変数の 3-積和標準形 命題論理式 $F(X_1, ..., X_n)$.
仕事： F が 充足可能 か否かの判定.
補足： 以下では積和標準形を CNF (Conjunctive Normal Form) と略記する.

この 3SAT 問題は NP 問題の 1 つである．さらにこの問題に対しては次の性質を証明することができる．これを 3SAT 問題の NP-困難性という.（注：正確には NP-困難性は多項式時間還元を用いて定義されるべきものだが，ここではその説明を省略する.）

定理 1.3. 3SAT 問題を判定する多項式時間アルゴリズムが存在するならば，すべての NP 問題に対し，それを判定する多項式時間アルゴリズムを作ることができる.

1.2. NP 困難な問題の例

NP 困難な問題は多数見つかっている．今回は以降の議論で重要となる例に絞って紹介する.

3NAESAT 問題
入力： n 変数の 3-CNF 論理式 F（変数数を n とする）.
仕事： F が Not-All-Equal の意味で充足可能か否かの判定.

MAXCUT 問題（判定版）
入力： 無向グラフ $G = (V, E)$ と自然数数 K（グラフの頂点数を n とする）.
仕事： G の 頂点分割 (V_1, V_2) で，カット辺数 が K 以上のものが存在するかの判定.

Bisection 問題（判定版）
入力： 無向グラフ $G = (V, E)$ と自然数数 K（グラフの頂点数を n とする）.
仕事： G の 等数頂点分割 (V_1, V_2) で，カット辺数が K 以下のものが存在するかの判定.

MAX2XORSAT 問題（判定版）
入力： 2XOR-CNF 論理式 F と自然数 K（変数数を n とする）.
仕事： F の命題変数に対する割り当てで，K 個以上の節を真にするものが存在するかの判定.

こうした問題に対し，以下の問題は似たように見えるが多項式時間で計算可能である.

MINCUT 問題（判定版）
入力： 無向グラフ $G = (V, E)$ と自然数数 K（グラフの頂点数を n とする）.
仕事： G の頂点分割 (V_1, V_2) で，カット辺数が K 以下のものが存在するかの判定.

2XORSAT 問題（判定版）
入力： 2XOR-CNF 論理式 F（変数数を n とする）.
仕事： F が充足可能か否かの判定.

1.3. NP 困難な問題の例

3SAT 問題は代表的な NP 問題なので，これに対して様々なヒューリスティクスやアルゴリズムが提案されている．その中には「平均的には」うまく動くと言われているものもあるし，実際に証明されているものもある．

ここでは一般に局所探索アルゴリズムと呼ばれるものについて紹介しよう．実は，局所探索アルゴリズムと言ってもいろいろな種類がある．3SAT 問題に対しては，まず [2] の論文で貪欲局所探索アルゴリズムの平均的な性能が証明された．しかし，実際には 3SAT 問題に対しては，ランダムウォーク型局所探索アルゴリズムの方が良い性能を持つことが実験的に明らかになっている．その解析はかなりやっかいだったが，[3] の論文で大きく進展した．

参考文献

NP 問題，NP 困難性などについては以下を参照することをお勧めする：

[1] M. Sipser 著，大田・田中監訳，計算理論の基礎（3：複雑さの理論），共立出版，2008.

[2] E. Koutsoupias and C.H. Papadimitriou, On the greedy algorithm for satisfiability, Information Processing Letters 43(1), 53–55, 1992.

[3] D. Achlioptas, Lower bounds for random 3-SAT via differential equations, Theoretical Computer Science 265, 159–185, 2001.