Seismic Design of Urban Infrastructure
都市施設の耐震設計
(2-1) Seismic Response Analysis of Structures
(2-1) 構造物の動的解析法

Kazuhiko Kawashima
Department of Civil Engineering
Tokyo institute of Technology
東京工業大学大学院理工学研究科土木工学専攻
川島一彦

ここで学ぶ範囲

耐震設計の基礎理論として、多自由度系の地震応答解析に関し、以下の点を勉強する。

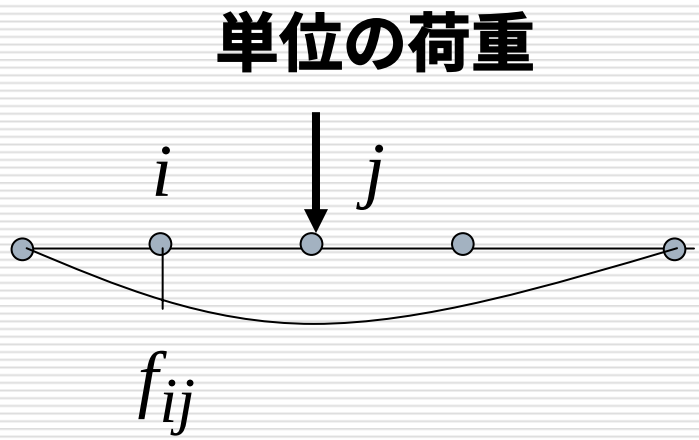
- ✓運動方程式
- ✓固有周期、固有振動モード、振動モードの直交性
- ✓基準座標
- ✓減衰のモデル化
- ✓モード合成法による解析
- ✓直接積分法による解析

2．1．剛性行列とフレキシビリティー行列

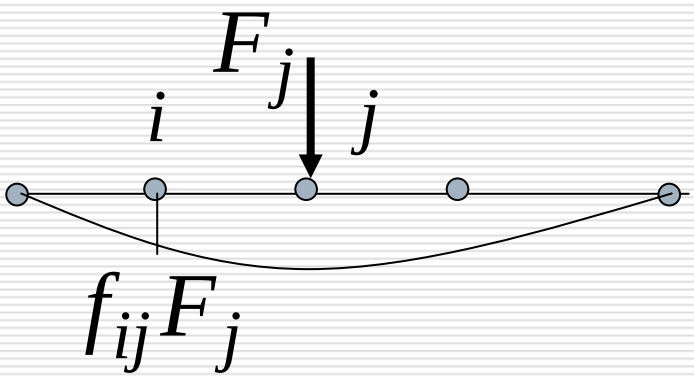
1）　フレキシビリティーマトリックス

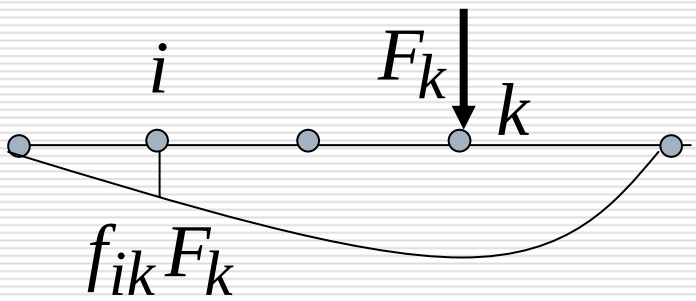
●線形な荷重と変位の関係を持つ構造物を n個の自由度を有する離散型にモデル化する。

●いま、j点に単位の荷重を作用させ、その他の点には荷重を作用させないときに、i点に生じる静的変位をf_{ij} とする。



●静的荷重F_j（1、2、…、n）が作用した場合に、これらの荷重によってi点に生じる変位は、重ね合わせの原理を用いることによって、以下のように表される。





$$u_i = f_{i1}F_1 + f_{i2}F_2 + \cdots\cdots\cdots + f_{in}F_n$$

すなわち、

$$
\begin{aligned}
u_1 &= f_{11}F_1 + f_{12}F_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + f_{1n}F_n \\
u_2 &= f_{21}F_1 + f_{22}F_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + f_{2n}F_n \\
&\vdots \\
u_n &= f_{n1}F_1 + f_{n2}F_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + f_{nn}F_n
\end{aligned}
$$

マトリックス表示すると、

$$
\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdot & \cdot & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdot & \cdot & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{Bmatrix}
$$

もっと簡単に表すと、

$$\{u\} = [F]\{Q\}$$

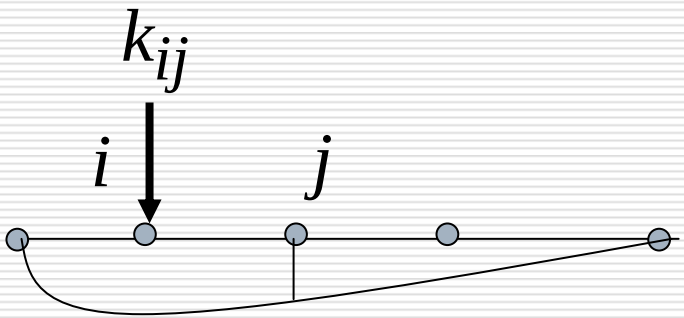
変位ベクトル　　荷重ベクトル

フレキシビリティーマトリックス

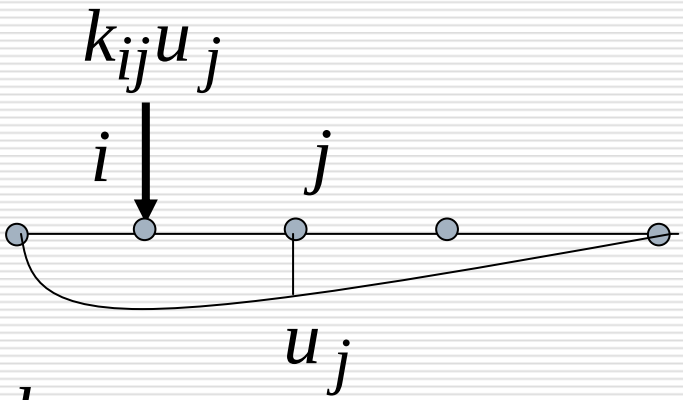
2） 剛性行列

●同じように、いま、j点に単位の静的変位を生じさせるためにj点に作用させる必要のある静的荷重をk_{ij}とする。

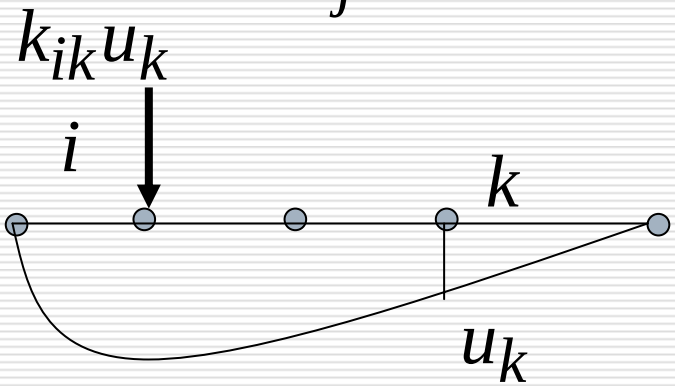
●このとき、系に生じる静的荷重と静的変位の関係は、重ね合わせの原理により、以下のように表される。



単位の変位



$$Q_i = k_{i1}u_1 + k_{i2}u_2 + \cdots\cdots\cdots + k_{in}u_n$$



$$Q_1 = k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + k_{1n}u_n$$

$$Q_2 = k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + k_{2n}u_n$$

$$\bullet$$

$$\bullet$$

$$Q_n = k_{n1}u_1 + k_{n2}u_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + k_{nn}u_n$$

マトリックス表示すると、

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ . \\ . \\ Q_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & . & . & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & . & . & k_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ k_{n1} & k_{n2} & . & . & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_n \end{Bmatrix}$$

すなわち、

$$\{Q\} = [K]\{u\}$$

荷重ベクトル　**変位ベクトル**

剛性行列

Stiffness Matrix

3） 剛性行列とフレキシビリティ行列の関係

$$\{Q\} = [K]\{u\}$$

$[K]^{-1}$ を前からかけると、

$$[K]^{-1}\{Q\} = [K]^{-1}[K]\{u\} = [I]\{u\} = \{u\}$$

前に求めたように、

$$\{u\} = [F]\{Q\}$$

これより、

$$[F] = [K]^{-1}$$

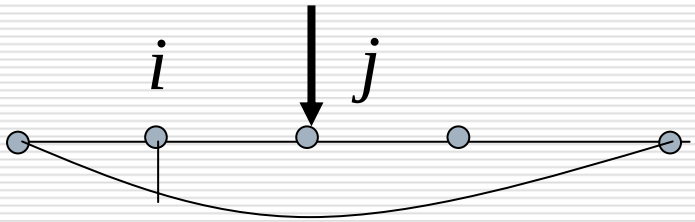
$$[K] = [F]^{-1}$$

すなわち、

$$[K][F] = [F][K] = [I]$$

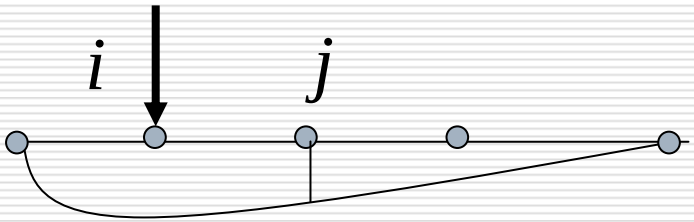
4） MaxwellとBettiの相反作用の原理

単位の荷重



f_{ij}

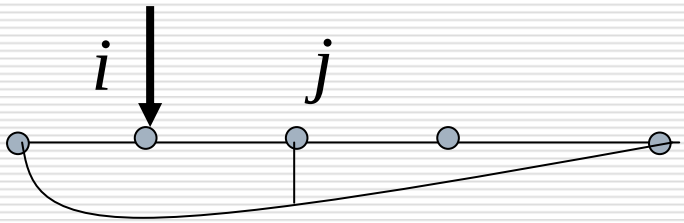
単位の荷重



f_{ji}

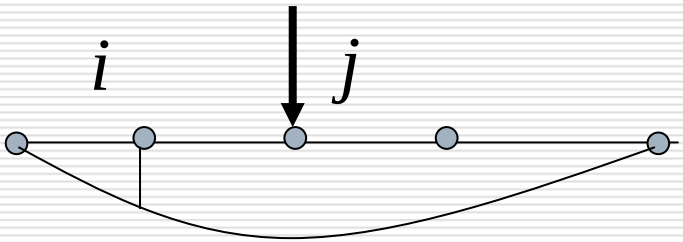
$$f_{ij} = f_{ji}$$

k_{ij}



単位の変位

k_{ji}



単位の変位

$$k_{ij} = k_{ji}$$

すなわち、剛性行列、フレキシビリティーマトリックスは対称行列である。

2．2．多自由度系（非減衰系）の運動方程式

1）　ダランベールの法則に基づく運動方程式

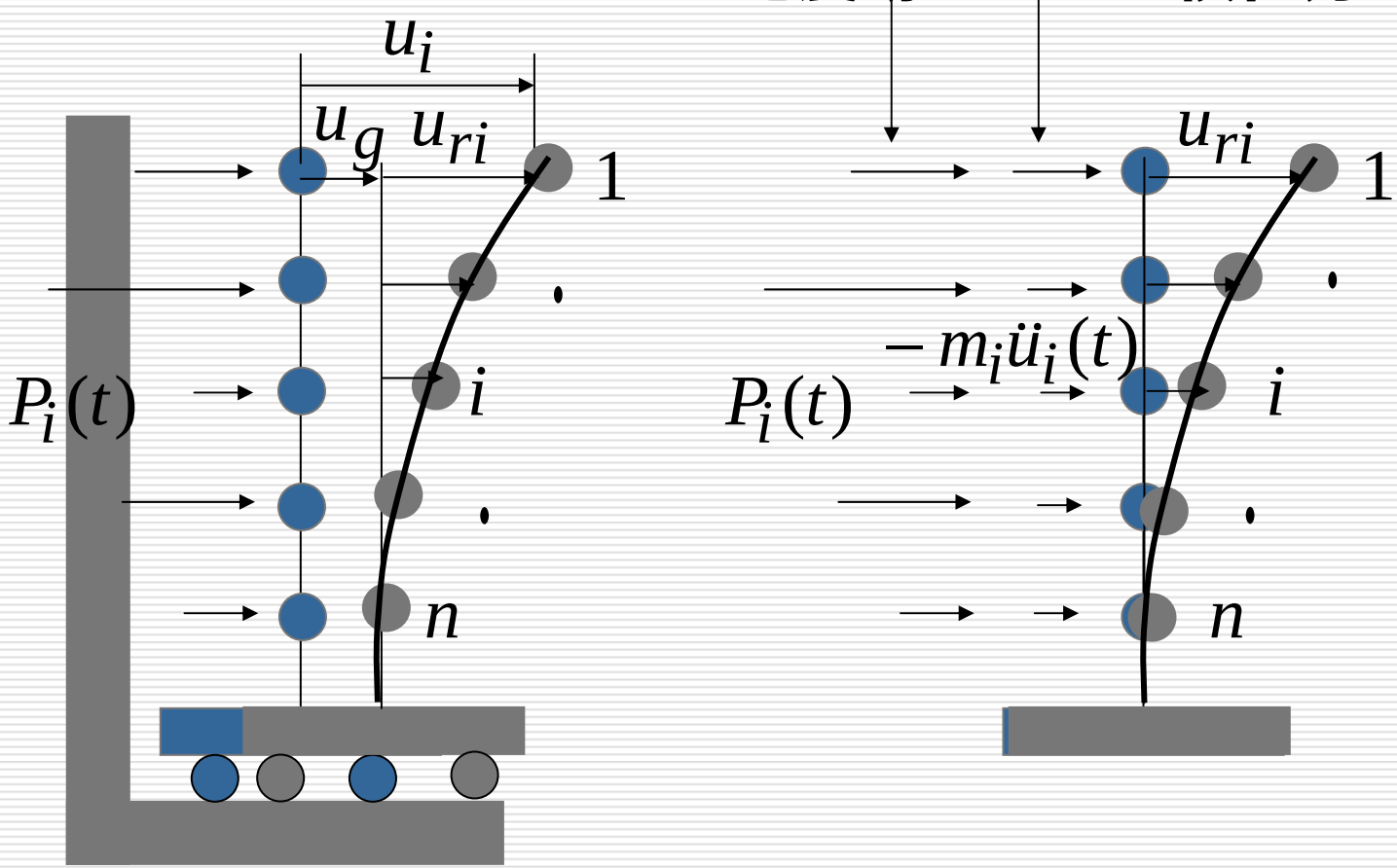
●構造物をn自由度の離散型にモデル化する。構造物の質量は、質点1，2，・・・・、nに集中している。このような質量を集中質量と呼ぶ。

●質点はすべて水平方向の自由度を持つとする。これはせん断振動を仮定したことに相当する。曲げ振動を考える場合には、水平方向の自由度の他、回転の自由度も加わるが、以下の示す説明は曲げ振動でもせん断振動でも基本的に同じであるため、簡単のため、ここではせん断振動の場合を示す。

●構造物の基礎に地震動加速度 $\ddot{u}_g(t)$ が作用し、さらにi番目の質点には水平力 $P_i(t)$ が作用するとする。ダランベールの法則に従えば、i番目の質点の絶対応答加速度を $\ddot{u}_i(t)$ とすれば、地震動の作用はi番目の質点に $-m_i\ddot{u}_i(t)$ の慣性力が作用すると取り扱えばよい。

2） 地震動を受ける多自由度系の運動方程式

$$u_i = u_{ri} + u_g$$



この時には、力のつり合いは、

$$Q_i = P_i(t) - m_i \ddot{u}_i$$

すなわち、

$$\begin{Bmatrix} P_1 - m_1\ddot{u}_1 \\ P_2 - m_2\ddot{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n - m_n\ddot{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdot & \cdot & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdot & \cdot & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdot & \cdot & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{rn} \end{Bmatrix}$$

ここで、下添字rは基礎に対する相対変位であることを表している。

これをさらに書き改めると、

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & m_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdot & \cdot & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdot & \cdot & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdot & \cdot & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{rn} \end{Bmatrix}$$

すなわち、

$$\{P\} - [M]\{\ddot{u}\} = [K]\{u_r\}$$

$$u_i = u_{ri} + u_g \qquad \ddot{u}_i = \ddot{u}_{ri} + \ddot{u}_g$$

であるから、

単位ベクトル

$$\{u\} = \{u_r\} + u_i\{I\}$$

$$\{\ddot{u}\} = \{\ddot{u}_r\} + \ddot{u}_i\{I\}$$

を代入すると、

$$\{P\} - [M]\{\ddot{u}_r\} - \ddot{u}_g[M]\{I\} = [K]\{u_r\}$$

すなわち、多自由度系の運動方程式は、次のようになる。

$$[M]\{\ddot{u}_r\} + [K]\{u_r\} = \{P\} - \ddot{u}_g[M]\{I\}$$

表示を簡単にするために、下添字rを省略すると、

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{P\} - \ddot{u}_g[M]\{I\}$$

3）固有振動数及び固有振動モード

非減衰の多自由度系の自由振動を与える特性方程式は、
運動方程式において右辺を0とおくと、

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=\{0\}$$

変位及び加速度を次のように仮定し、

$$\{u\}=\{A\}\sin\omega t$$

$$\{\ddot{u}\}=-\omega^2\{A\}\sin\omega t=-\omega^2\{u\}$$

これを上式に代入すると、

$$-\omega^2[M]\{A\}+[K]\{A\}=\{0\}$$

すなわち、特性方程式は次のようになる。

$$\left|[K]-\omega^2[M]\right|\{A\}=\{0\}$$

$\{A\} \neq \{0\}$ の有意な解を得るためには、

$$\left| [K] - \omega^2 [M] \right| = 0$$

これを特性方程式と呼ぶ。上式を解くことにより、n個の円固有振動数 ω_i （1，2、・・、n）が求められる。

ω_i を i次の円固有振動数と呼ぶ。

耐震設計では、ω_i をそのまま使用することはほとんどない。
一般には、次式による固有周期 T_i (s)を用いる。

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$$

T_i をi次の固有周期と呼ぶ。

●円固有振動数が求められると、これらを特性方程式に代入することにより、係数 A_j (1，2、・・、n) が求められる。ただし、特性方程式の右辺がゼロであるから、係数の相対的な大きさだけが求められる。

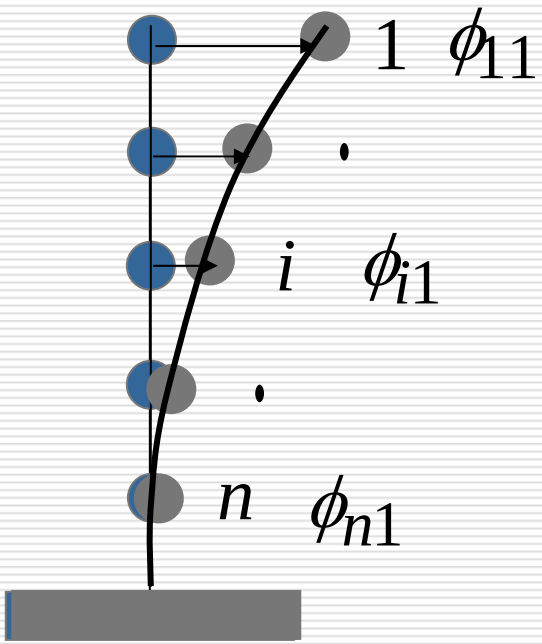
●1つの円固有振動数に対して1組の係数 A_j (1，2、・・、n) が求められる。これを、以下、i次の固有振動モードと呼び、ϕ_{ji} (j=1、2、…、n、i=1、2、…、n) と表す。

● ω_i を小さい順に並べたとき、最も小さい円固有振動数 ω_1 を1次固有振動数と呼ぶ。基本固有振動数、あるいは最低次の円固有振動数と呼ぶこともある。

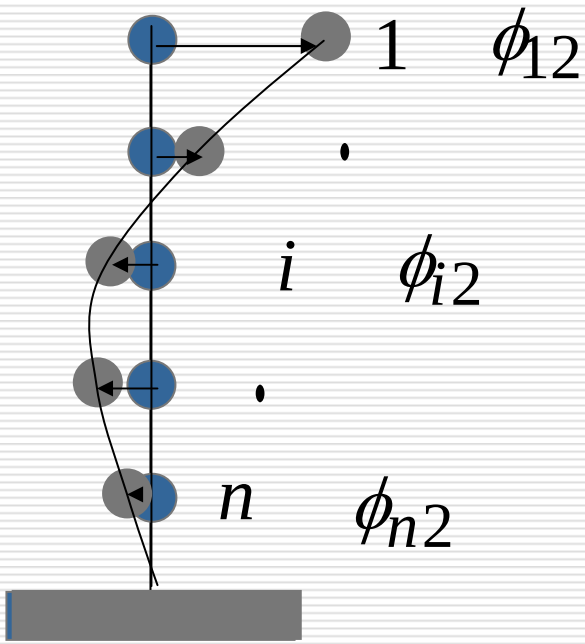
●固有振動モード ϕ_{ji} の下添字i、jは、第i次の振動モードによるj質点の値であることを示している。

振動モード

1次モード

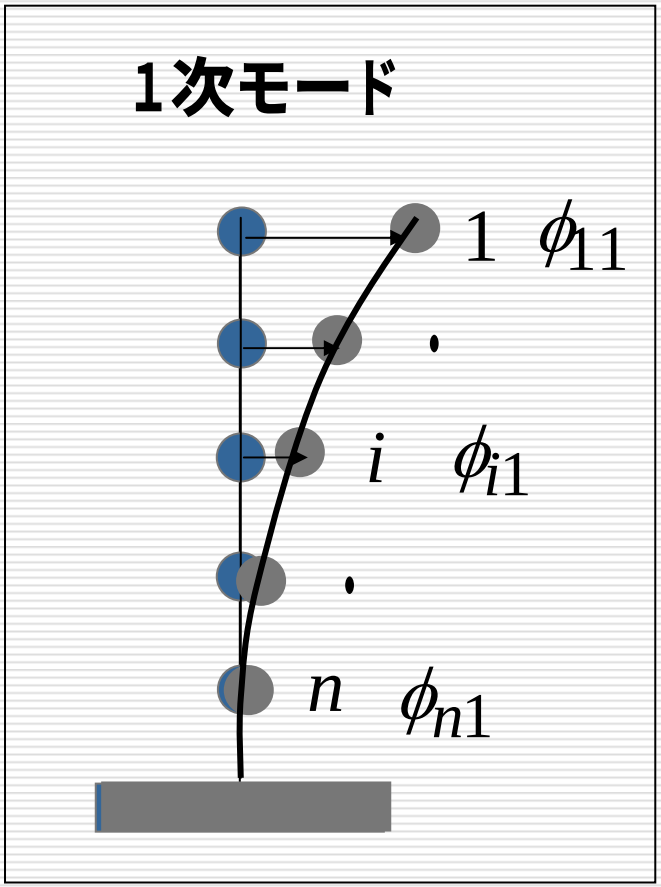


2次モード



第i次の振動モードによる各質点の値を集めると、

$$\{\phi_i\} = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{ni} \end{Bmatrix}$$



これを第i次の固有振動モードと呼ぶ。単に第i次の振動モードと呼ぶこともある。

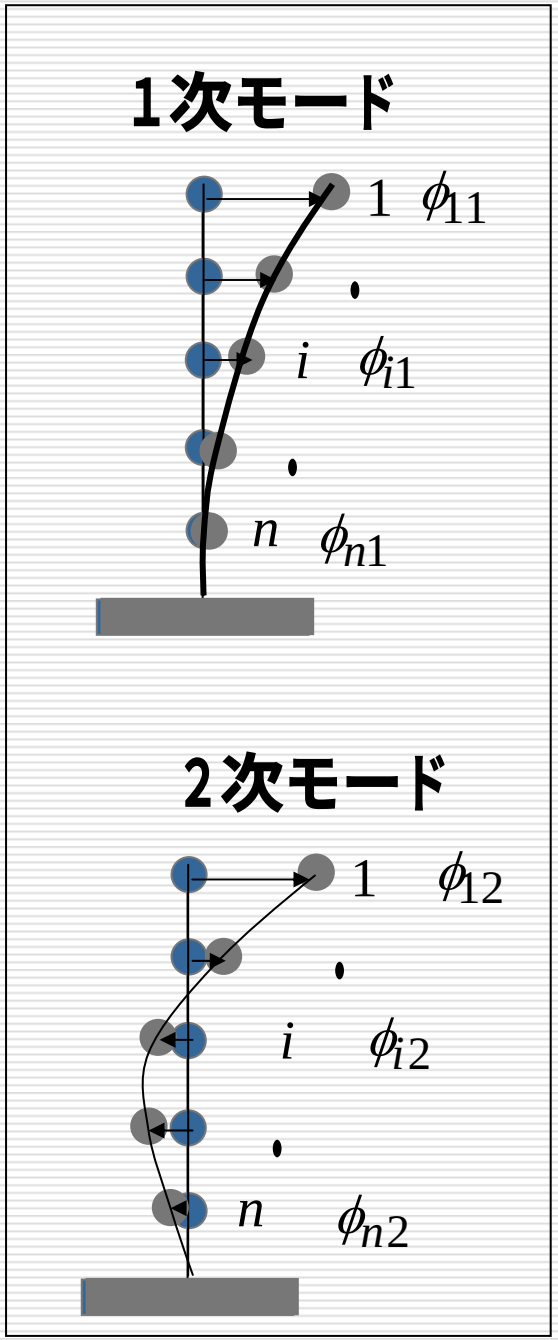
各次の振動モードを集めると、

$$[\Phi] = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \phi_n]$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdot & \cdot & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdot & \cdot & \phi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\phi_1 \qquad \phi_2$$

これを固有振動モード行列と呼ぶ。



同じように、各次の円固有振動数を集めると、

$$[\Omega]=\begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \omega_n \end{bmatrix}$$

これを円固有振動数行列と呼ぶ。

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$$

これを第i次の固有周期と呼ぶ。最も長い固有周期 T_1 は基本固有周期と呼ばれることもある。

4）振動モードの直交性

自由振動方程式を書き直すと、

$$\omega_i^2[M]\{\phi_i\}=[K]\{\phi_i\}$$

この式は任意の振動モード及び円固有振動数に対して成立するから、これをr次およびs次について書くと、

$$\omega_r^2[M]\{\phi_r\}=[K]\{\phi_r\}$$

$$\omega_s^2[M]\{\phi_s\}=[K]\{\phi_s\}$$

転置すると、

$$\omega_s^2\{\phi_s\}^T[M]^T=\{\phi_s\}^T[K]^T$$

$$\omega_r^2\{\phi_s\}^T[M]\{\phi_r\}=\{\phi_s\}^T[K]\{\phi_r\}$$

$$\omega_s^2\{\phi_s\}^T[M]^T\{\phi_r\}=\{\phi_s\}^T[K]^T\{\phi_r\}$$

もう一度、書くと、

$$\omega_r{}^2\{\phi_s\}^T[M]\{\phi_r\}=\{\phi_s\}^T[K]\{\phi_r\}$$
$$\omega_s{}^2\{\phi_s\}^T[M]^T\{\phi_r\}=\{\phi_s\}^T[K]^T\{\phi_r\}$$

$[M]$と$[K]$ は対称行列であるから、

$$[M]^T=[M] \qquad [K]^T=[K]$$

これを考慮して、上の式から下の式を差し引くと、

$$(\omega_r{}^2-\omega_s{}^2)\{\phi_s\}^T[M]\{\phi_r\}=0$$

したがって、$\omega_r \neq \omega_s$ の場合には、

$$\{\phi_s\}^T[M]\{\phi_r\}=0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i\phi_{ir}\phi_{is}=0$$

したがって、

$$\{\phi_s\}^T[K]\{\phi_r\}=0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i\phi_{ir}\phi_{is}=0$$

参考：ベクトルの直交性とは何か？

2つのベクトル $\{a\}$ と $\{b\}$ があり、

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \qquad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}$$

$$\{a\}^T \{b\} = a_x b_x + a_y b_y + a_x b_z = 0$$

が成立するとき、ベクトル$\{a\}$とベクトル$\{b\}$は直交するという。

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \phi_{ir} \phi_{is} = 0 \longrightarrow m^{1/2}\phi_s \text{と} \ m^{1/2}\phi_r$$ が直交する。ここで、

$m^{1/2}$ は重み係数と呼ばれる。

同様に、

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \phi_{ir} \phi_{is} = 0 \longrightarrow k^{1/2}\phi_s$$ **と** $k^{1/2}\phi_r$ **が直交することを示している。**

ここで、 $k^{1/2}$ **は重み係数である。**

まとめると、

$$\{\phi_s\}^T[M]\{\phi_r\}=0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i\phi_{ir}\phi_{is}=0$$

$$\{\phi_s\}^T[K]\{\phi_r\}=0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i\phi_{ir}\phi_{is}=0$$

●上式は、質量行列及び剛性行列を介して振動モードが直交することを表している。この関係は、$\omega_r \neq \omega_s$ である任意の2組の振動モードに対して成立する。これを振動モードの直交性と呼ぶ。ただし、$\omega_r = \omega_s$ の場合には振動モードの直交性は必ずしも成立する保証はない。

●振動モードの直交性は、互いに関連しあった自由度をもつ多自由度系の運動方程式を互いに独立な個の運動方程式に変換するために重要な役割を持っている。

5) 基準座標で表した非減衰系の運動方程式

相対変位ベクトル、相対加速度ベクトルを次のように変換する。

$$\{u\} = [\Phi]\{q\}$$

$$\{\ddot{u}\} = [\Phi]\{\ddot{q}\}$$

空間関数

時間関数

→ 変数分離

$\{q\}$ を基準座標、あるいは一般化された座標と呼ぶ

$\ddot{u}_g = 0$ の場合をまず解析する。この場合には、運動方程式は、

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{P\}$$

一般化座標を用いて表すと、

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [K][\Phi]\{q\} = \{P\}$$

$[\Phi]\{\ddot{q}\}$ を具体的に書いてみると、

$$
\begin{aligned}
[\Phi]\{\ddot{q}\} = {} & \phi_{11}\ddot{q}_1 + \phi_{12}\ddot{q}_2 + \cdots\cdots + \phi_{1r}\ddot{q}_r + \cdots\cdots + \phi_{1n}\ddot{q}_n \\
& + \phi_{21}\ddot{q}_1 + \phi_{22}\ddot{q}_2 + \cdots\cdots + \phi_{2r}\ddot{q}_r + \cdots\cdots + \phi_{2n}\ddot{q}_n \\
& \qquad\qquad \vdots \\
\{\phi_1\} \quad & + \phi_{r1}\ddot{q}_1 + \phi_{r2}\ddot{q}_2 + \cdots\cdots + \phi_{rr}\ddot{q}_r + \cdots\cdots + \phi_{rn}\ddot{q}_n \\
& \qquad\qquad \vdots \\
& + \phi_{n1}\ddot{q}_1 + \phi_{n2}\ddot{q}_2 + \cdots\cdots + \phi_{nr}\ddot{q}_r + \cdots\cdots + \phi_{nn}\ddot{q}_n
\end{aligned}
$$

$$
= \{\phi_1\}\ddot{q}_1 + \{\phi_2\}\ddot{q}_2 + \cdots\cdots\{\phi_r\}\ddot{q}_r + \cdots\cdots\{\phi_n\}\ddot{q}_n
$$

同様に、

$$
[\Phi]\{q\} = \{\phi_1\}q_1 + \{\phi_2\}q_2 + \cdots\cdots\{\phi_r\}q_r + \cdots\cdots\{\phi_n\}q_n
$$

$$\boxed{[M][\Phi]\{\ddot{q}\}+[K][\Phi]\{q\}=\{P\}}$$

前から $\{\phi_r\}^T$ を乗じると、

$$\{\phi_r\}^T[M][\Phi]\{\ddot{q}\}+\{\phi_r\}^T[K][\Phi]\{q\}=\{\phi_r\}^T\{P\}$$

$[\Phi]=[\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \phi_n]$ であるから、これを代入すると、

$$\{\phi_r\}^T[M][\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \phi_r \quad \cdot \quad \cdot \quad \phi_n]\{\ddot{q}\}$$
$$+\{\phi_r\}^T[K][\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \phi_r \quad \cdot \quad \cdot \quad \phi_n]\{q\}=\{\phi_r\}^T\{P\}$$

ここで、振動モードの直交性を使用すると、

$\{\phi_r\}^T[M]\{\phi_s\}=0 \qquad \{\phi_r\}^T[K]\{\phi_s\}=0$ であるから、

r 次だけの項が残り、あとは全て0になるから、

$$\{\phi_r\}^T[M]\{\phi_r\}\{\ddot{q}\}+\{\phi_r\}^T[K]\{\phi_r\}\{q\}=\{\phi_r\}^T\{P\}$$

$$\boxed{\{\phi_r\}^T[M]\{\phi_r\}\{\ddot{q}\}+\{\phi_r\}^T[K]\{\phi_r\}\{q\}=\{\phi_r\}^T\{P\}}$$

この式は、もともとの運動方程式 $[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=\{P\}$ では各次のモードが連成し合っているのに対して、r次だけの応答を他の振動モードとは関係なく求められることを示している。

$$M_r^* = \{\phi_r\}^T[M]\{\phi_r\}$$ 一般化されたr次の質量

$$K_r^* = \{\phi_r\}^T[K]\{\phi_r\}$$ 一般化されたr次のばね定数

$$P_r^* = \{\phi_r\}^T\{P\}$$ 一般化されたr次の荷重

と置くと、

$$M_r^*\ddot{q}_r + K_r^* q_r = P_r^*$$ → 質量M_r^*、ばね定数K_r^* の1自由度系に荷重 P_r^* が作用する場合の運動方程式

すなわち、一般化された座標を用いて座標変換することにより、n次の連成した運動方程式をn個の独立した運動方程式に変換できるのである。

r次の運動方程式は、

$$M_r^* \ddot{q}_r + K_r^* q_r = P_r^*$$

r次の円固有振動数 ω_r は、

$$\omega_r{}^2 = \frac{K_r^*}{M_r^*} = \frac{\{\phi_r\}^T [K]\{\phi_r\}}{\{\phi_r\}^T [M]\{\phi_r\}} = \frac{[K]\{\phi_r\}}{[M]\{\phi_r\}}$$

6）基準座標で表した減衰系の運動方程式

以上は、減衰がない場合の多自由度系の運動方程式の解であるが、構造物には必ず減衰が存在する。いま、この効果を減衰定数によって表すことにすると、運動方程式は次のようになる。

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{P\}$$

$[C]$ → 減衰行列

$\{\dot{u}\}$ → 相対速度ベクトル

$$\{F_D\} = \begin{Bmatrix} f_{d1} \\ f_{d2} \\ \cdot \\ f_{di} \\ \cdot \\ f_{dn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & c_{1i} & & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & & & \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ c_{i1} & & & c_{ii} & & c_{in} \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & c_{ni} & \cdot & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \cdot \\ \dot{v}_i \\ \cdot \\ \dot{v}_n \end{Bmatrix}$$

●減衰行列$[C]$の成分c_{ij}の意味は、剛性行列の成分k_{ij}と同じであり、j番目の質点に単位の相対速度が生じ、その他の質点の相対速度がすべてゼロであるときに、i番目の質点に作用する減衰力である。

●一般に、減衰行列は非対角項がゼロではないから、上式はこのままではn個の独立した1自由度系の運動方程式に分離することはできない。

一般化座標を用いて、以下のように変数分離する

$$\{u\} = [\Phi]\{q\}$$
$$\{\dot{u}\} = [\Phi]\{\dot{q}\}$$
$$\{\ddot{u}\} = [\Phi]\{\ddot{q}\}$$

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [C][\Phi]\{\dot{q}\} + [K][\Phi]\{q\} = \{P\}$$

前から、$[\Phi]^T$ を乗じると、

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{q}\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{q\} = [\Phi]^T\{P\}$$

$$[\Phi]^T = [\phi_1 \ \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_n]^T = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n^T \end{bmatrix}$$

であるから、

$$[\Phi]^T [M][\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n^T \end{bmatrix} [M][\phi_1 \ \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_n]$$

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n^T \end{bmatrix} [M][\phi_1 \;\; \phi_2 \;\; \cdot\cdot \;\; \phi_n]$$

$$= \begin{bmatrix} \overbrace{\boxed{\{\phi_1\}^T[M]\{\phi_1\}}}^{M_1^*} & \overbrace{\{\phi_1\}^T[M]\{\phi_2\}}^{0} & \cdot & \cdot & \cdot & \{\phi_1\}[M]\{\phi_n\} \\ \{\phi_2\}^T[M]\{\phi_1\} & \boxed{\{\phi_2\}^T[M]\{\phi_2\}} & \cdot & \cdot & \cdot & \{\phi_2\}^T[M]\{\phi_n\} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \{\phi_n\}^T[M]\{\phi_1\} & \{\phi_n\}^T[M]\{\phi_2\} & \cdot & \cdot & \cdot & \boxed{\{\phi_n\}^T[M]\{\phi_n\}} \end{bmatrix}$$

$$[\Phi]^T[M][\Phi]=\begin{bmatrix} M_1^* & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & M_2^* & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & M_n^* \end{bmatrix}$$

ここで、 M_r^* は一般化されたｒ次の質量

同様に、

$$[\Phi]^T[K][\Phi]=\begin{bmatrix} K_1^* & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & K_2^* & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & K_n^* \end{bmatrix}$$

ここで、 K_r^* は一般化されたｒ次のばね定数

$$[\Phi]^T \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n^* \end{Bmatrix}$$

ここで、$P_r^* = \{\phi_r\}^T \{P\}$ は一般化されたr次荷重

減衰行列に対しては、一般に振動モードの直交性は成立しない。しかし、剛性行列や質量行列と同じように、減衰行列が次のように対角化できると仮定する。ただし、この仮定は極めてラフの仮定である。

$$[\Phi]^T[C][\Phi]=\begin{bmatrix} C_1^* & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & C_2^* & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & C_n^* \end{bmatrix}$$

ここで、$C_r^* = \{\phi_r\}^T[C]\{\phi_r\}$ は一般化されたr次の減衰係数

$$
\begin{bmatrix} M_1^* & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & M_2^* & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & M_n^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{q}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1^* & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & C_2^* & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & C_n^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{q}_n \end{Bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} K_1^* & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & K_2^* & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & K_n^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n^* \end{Bmatrix}
$$

すなわち、減衰行列にも直交性が成り立つと仮定できれば、n次元の連成した減衰運動方程式が、次のようにn個の独立した1自由度系の運動方程式に分離できる

$$M_r^* \ddot{q}_r + C_r^* \dot{q}_r + K_r^* q_r = P_r^*$$

両辺を M_r^* で除すと、

$$\ddot{q}_r + 2h_r \omega_r \dot{q}_r + \omega_r{}^2 q_r = \frac{P_r^*}{M_r^*}$$

ここで、h_r はr次の減衰定数で、

$$\frac{C_r^*}{M_r^*} = 2h_r \omega_r$$

この解は、以下のようになる。

$$q_r(t) = e^{-h_r \omega_{nr} t}\left\{ q_r(0)\cos\omega_d t + \left(\frac{\dot{q}_r(0)}{\omega_{dr}} + \frac{h_r \omega_{nr} q_r(0)}{\omega_{dr}}\right)\sin\omega_{dr} t \right\}$$

$$+ \frac{1}{M_r^* \omega_{dr}} \int_0^t P_r^*(\tau) e^{-h\omega_{nr}(t-\tau)} \sin\omega_{dr}(t-\tau)\, d\tau$$

ω_{nr}　r次の非減衰減衰固有円振動数

ω_{dr}　r次の減衰固有円振動数

$q_r(0)$　$\dot{q}_r(0)$　r次の基準座標の初期変位及び初期速度

7) 解析の流れ

$q_r \quad \dot{q}_r \quad \ddot{q}_r$ **の算出**

↓

$\{q\} \quad \{\dot{q}\} \quad \{\ddot{q}\}$ **の算出**

↓

$\{u_r\} = [\Phi]\{q\} \quad \{\dot{u}_r\} = [\Phi]\{\dot{q}\} \quad \{\ddot{u}_r\} = [\Phi]\{\ddot{q}\}$

↓

$\{Q\} = [K]\{u_r\}$

8) 地震動を受ける多自由度系の運動方程式と解

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=-\ddot{u}_g[M]\{I\}$$

この式は、下式右辺の $\{P(t)\}$ を $-\ddot{u}_g[M]\{I\}$ と置き直した形となっている。すなわち、

$$\boxed{[M][\Phi]\{\ddot{q}\}+[C][\Phi]\{\dot{q}\}+[K][\Phi]\{q\}=\{P\}}$$

$$\{P\}=-\ddot{u}_g[M]\{I\}$$

したがって、一般化された荷重は、

$$P_r^*=-\ddot{u}_g\{\phi_r\}^T[M]\{I\}$$

$$\ddot{q}_r + 2h_r\omega_r\dot{q}_r + \omega_r{}^2 q_r = \frac{P_r^*}{M_r^*}$$

の解は、

$$q_r(t) = e^{-h_r\omega_{nr}t}\left\{q_r(0)\cos\omega_d t + \left(\frac{\dot{q}_r(0)}{\omega_{dr}} + \frac{h_r\omega_{nr}q_r(0)}{\omega_{dr}}\right)\sin\omega_{dr}t\right\}$$

$$+\frac{1}{M_r^*\omega_{dr}}\int_0^t P_r^*(\tau)e^{-h\omega_{nr}(t-\tau)}\sin\omega_{dr}(t-\tau)d\tau$$

地震動を受ける場合には、一般に初期変位や初期速度は0であるから、これを無視すると、

$$q_r = \frac{1}{M_r^*\omega_{dr}}\int_0^t P_r^*(\tau)e^{-h\omega_{nr}(t-\tau)}\sin\omega_{dr}(t-\tau)d\tau$$

さらに、 $P_r^* = -\ddot{u}_g \{\phi_r\}^T [M]\{I\}$ を代入すると、

$$q_r = -\frac{\beta_r}{\omega_{dr}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-h_r \omega_{nr}(t-\tau)} \sin \omega_{dr}(t-\tau) d\tau$$

ここで、β_r はr次の**刺激係数**と呼ばれ、

$$\beta_r = \frac{\{\phi_r\}^T [M]\{I\}}{M_r^*} = \frac{\{\phi_r\}^T [M]\{I\}}{\{\phi_r\}^T [M]\{\phi_r\}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \phi_{ir}}{\sum_{i=1}^{n} m_i \phi_{ir}{}^2}$$

- r次の刺激係数は、r次の振動モードが地震応答に寄与する度合いを表す。
- β_r が大きいほどr次の寄与が大きいことを意味する。

9）刺激係数と有効質量

●あるモードが全体系の地震応答に寄与する割合を表す指標として、刺激係数の他、有効質量もよく使用される。

●r次の有効質量が大きいということは、r次の応答が全体応答に大きな影響を与えることを意味する。

10) 解析の流れ

$q_r \quad \dot{q}_r \quad \ddot{q}_r$ の算出

$\{q\} \quad \{\dot{q}\} \quad \{\ddot{q}\}$ の算出

$$\{u_r\} = [\Phi]\{q\} \qquad \{\dot{u}_r\} = [\Phi]\{\dot{q}\} \qquad \{\ddot{u}_r\} = [\Phi]\{\ddot{q}\}$$

$$\{u\} = \{u_r\} + \{I\}u_g \qquad \{\ddot{u}\} = \{\ddot{u}_r\} + \{I\}\ddot{u}_g$$

$$\{Q\} = [K]\{u_r\}$$

2．3．応答スペクトル法による解析

1）はじめに

（1）応答スペクトル法とは?

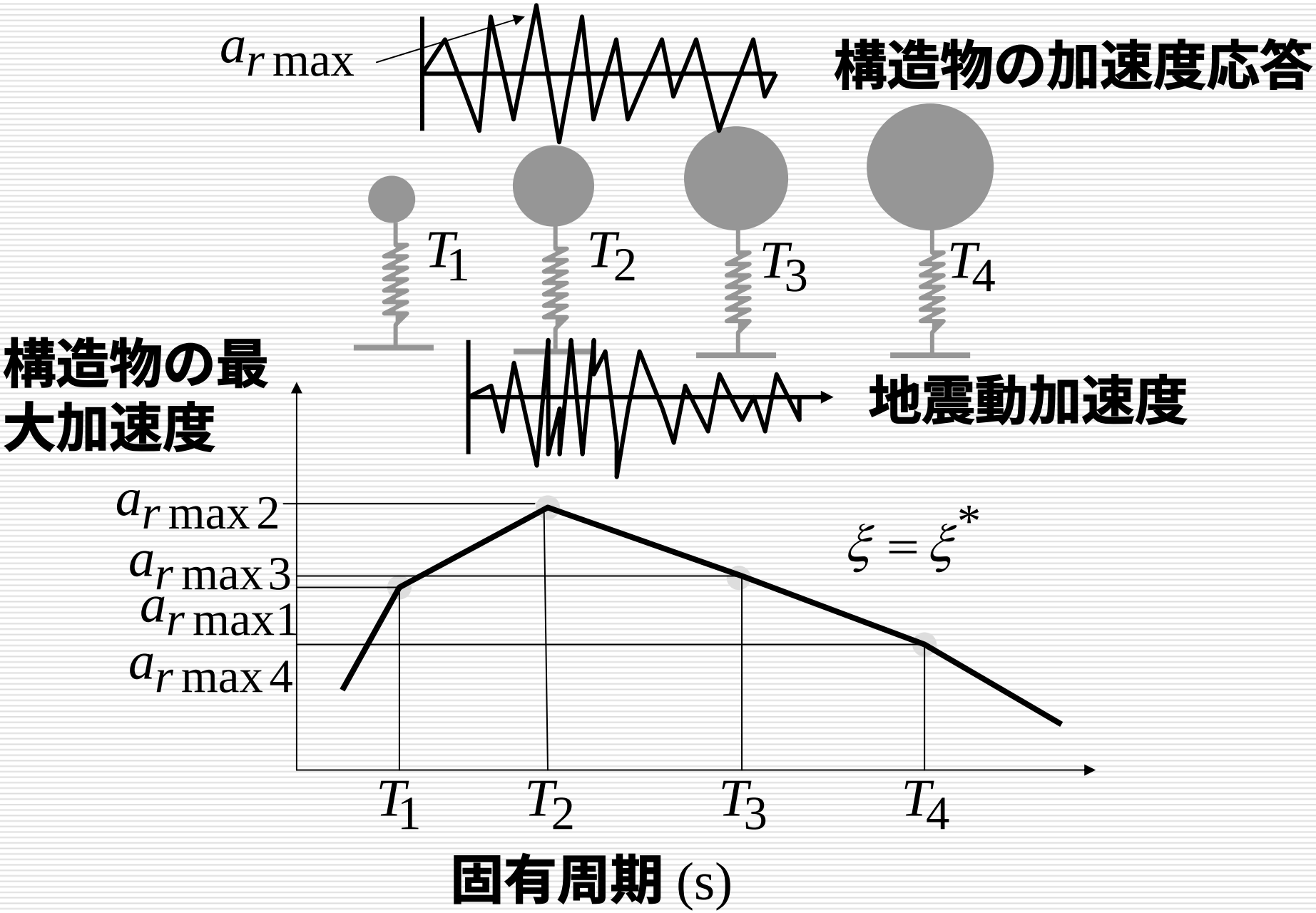
構造物の耐震設計では構造物に生じる最大応答が重要である。応答スペクトルを用いて、構造物に生じる最大応答を近似的に求める方法を応答スペクトル法と呼ぶ。

（2）応答スペクトル法の特徴は？

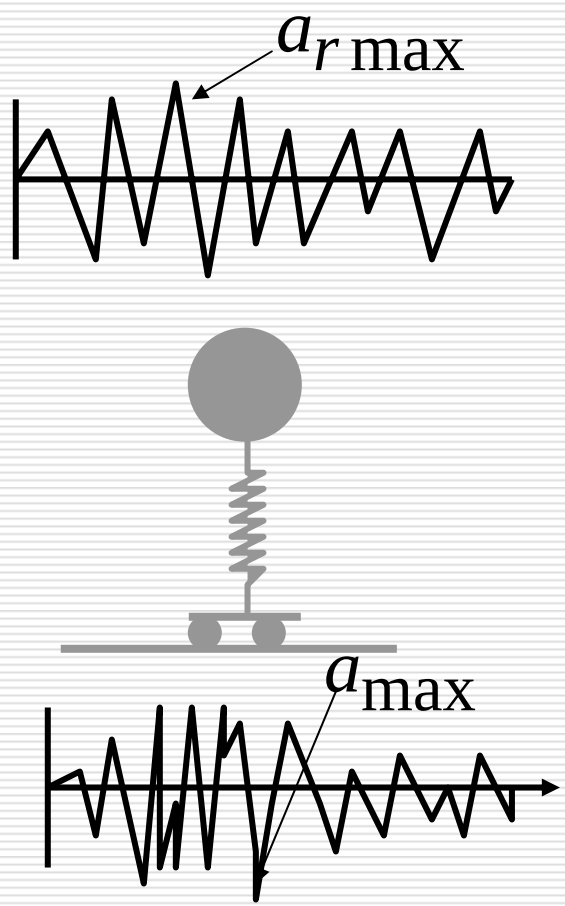
個々の地震動に対する応答ではなく、多数の強震記録の平均的な特性やある確率年に相当する応答スペクトル、光学的判断を加えて設定された設計応答スペクトルのように、平均的な地震動に対する構造物の応答を求めることができる。

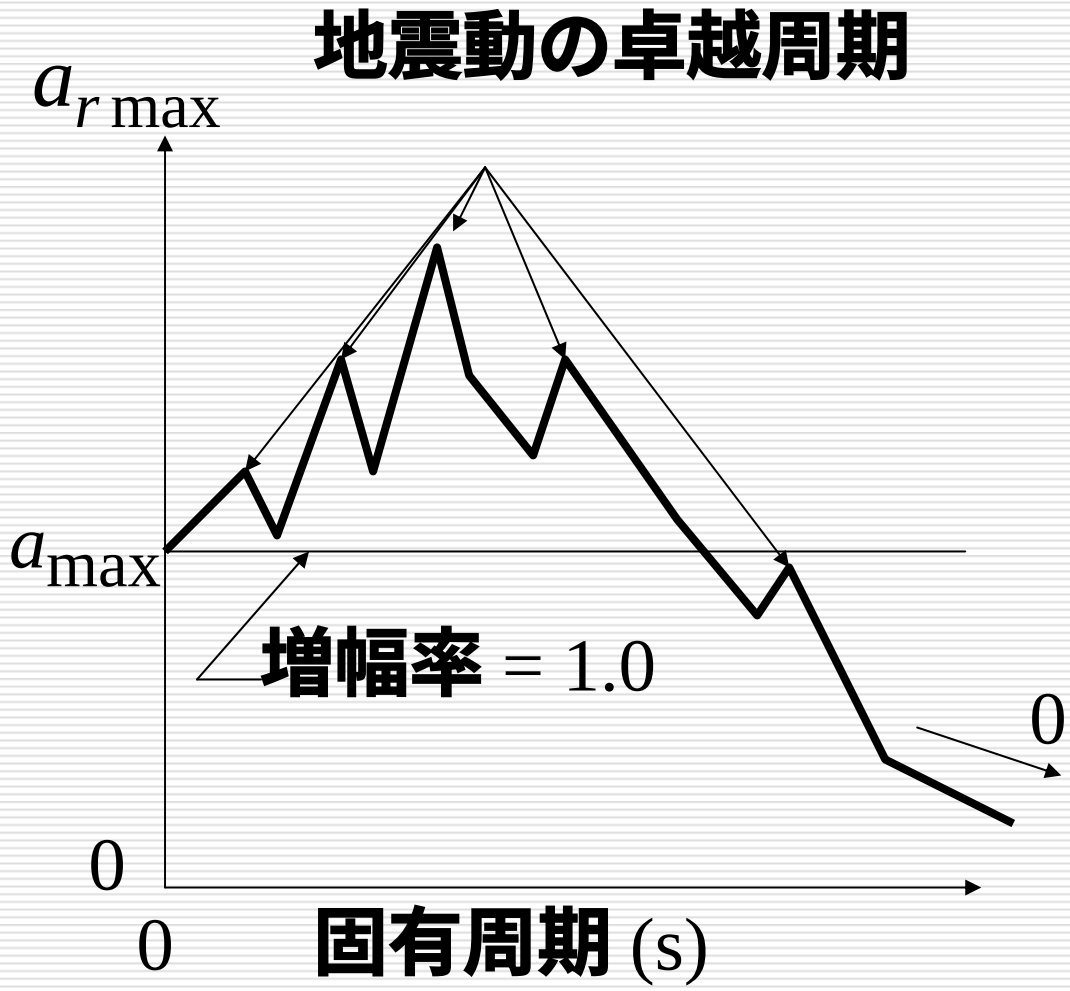
ただし、あくまで近似的な応答が求められるだけで、厳密な応答ではない。

(3) 加速度応答スペクトルとは (詳しくは、第3章参照)

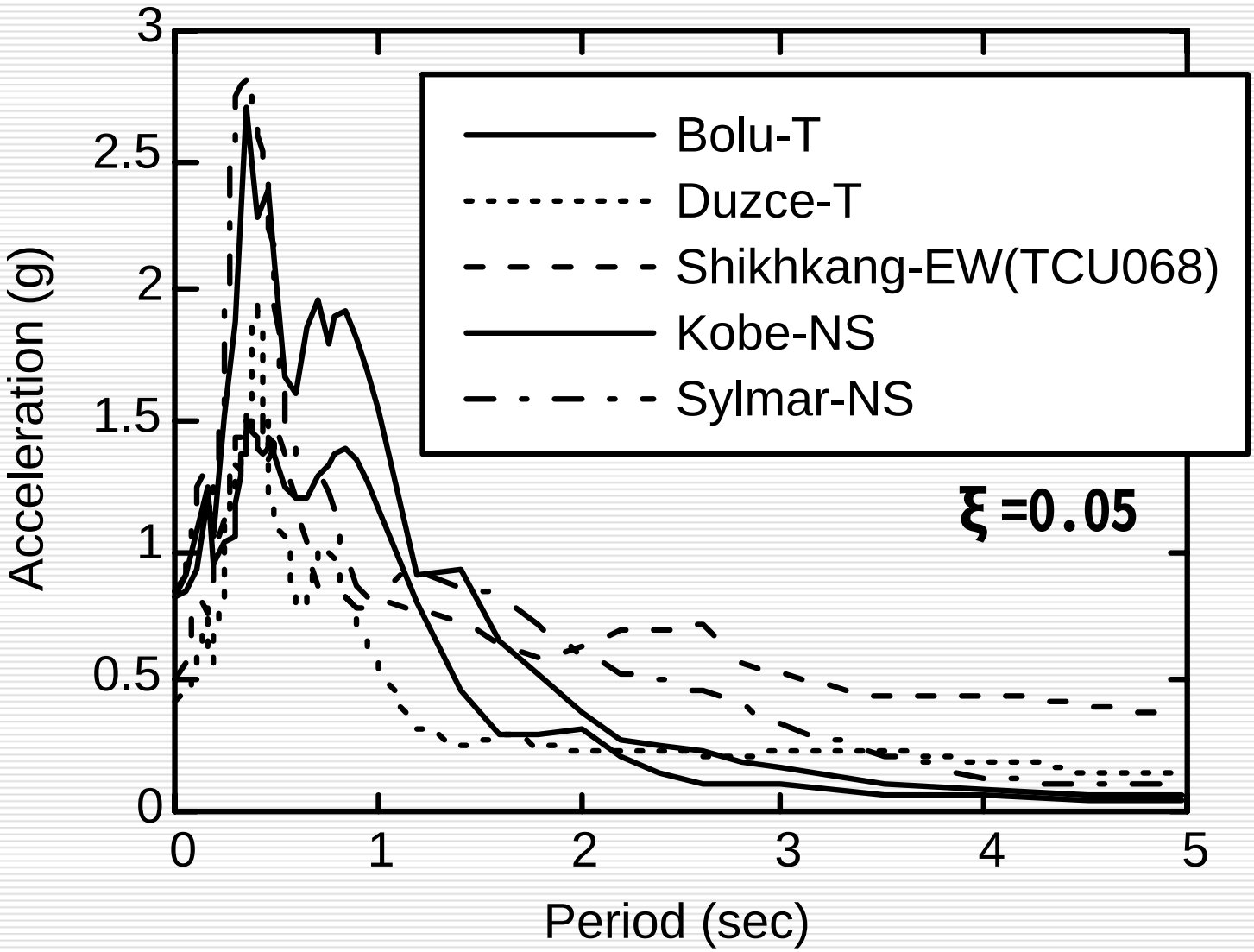


(4) 加速度応答スペクトル $S_A(T,\xi)$ の性質





(5) 典型的な強震記録の加速度応答スペクトル



2) 応答スペクトル法による解析

構造物の耐震設計では構造物に生じる最大応答が重要である。応答スペクトルを用いて、構造物に生じる最大応答を近似的に求める方法を応答スペクトル法と呼ぶ。

i点に生じる変位は、

$$u_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_{ir} q_r(t)$$

いま、r次の振動モードによってi点に生じる変位を

$$u_{ir}(t) = \phi_{ir} q_r(t)$$

とおくと、上式は、

$$u_i(t) = \sum_{i=1}^{n} u_{ir}(t)$$

r次の振動モードによる
i点での応答変位

ここで、 $q_r = -\dfrac{\beta_r}{\omega_{dr}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-h_r \omega_{nr}(t-\tau)} \sin \omega_{dr}(t-\tau) d\tau$

であったから、

$$u_{ir}(t) = -\frac{\phi_{ir}\beta_r}{\omega_{dr}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-h_r \omega_{nr}(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$

ここで、変位応答スペクトルを用いると、

$$S_D = \left| -\frac{1}{\omega_{dr}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-h_r \omega_{nr}(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \right|_{\max}$$

であるから、

$$\left| u_{ir}(t) \right|_{\max} = \beta_r \phi_{ir} S_D(\omega_{nr}, h_r)$$

どの位置i (i＝1，2，・・・、n) においても同じ瞬間に最大値を取るから、r次の振動モードによる最大応答は、

$$\{u_{r\max}\} = \begin{Bmatrix} |u_{1r}(t)|_{\max} \\ |u_{2r}(t)|_{\max} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ |u_{nr}(t)|_{\max} \end{Bmatrix} = \beta_r S_D(\omega_{nr}, h_r) \begin{Bmatrix} \phi_{1r} \\ \phi_{2r} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{nr} \end{Bmatrix}$$

$$= \beta_r S_D(\omega_{nr}, h_r)\{\phi_r\}$$

同様に、式(5.6)からr次の振動モードによって構造物に生じる断面力の最大値は、

$$\{Q_{r\max}\} = [K]\{u_{r\max}\}$$

●構造物の最大変位は各次モードの最大変位を重ね合わせればよいが、最大値どうしを加え合わせると、明らかに実際の最大変位を過大評価する。

●これは、各次の振動モードによる最大変位が同じ時間に最大値を取る可能性は低いためである。

●各次の振動モードごとの最大変位をどのように重ね合わせるかに関しては、いろいろな方法が提案されているが、一般には次のように2乗和の平方根法がよく用いられる。

$$\{u\}_{\max} \approx \sqrt{\{u_{1\max}\}^2 + \{u_{2\max}\}^2 + \cdots + \{u_{r\max}\}^2 + \cdots\cdots \{u_{n\max}\}^2}$$

断面力に対しても、同様に、r次の最大値を近似的に求めると、

$$\{Q\}_{\max} \approx \sqrt{\{Q_{1\max}\}^2 + \{Q_{2\max}\}^2 + \cdots + \{Q_{r\max}\}^2 + \cdots\cdots \{Q_{n\max}\}^2}$$

一般には、すべての振動モードによる最大値を重ね合わせなくても、高次の振動モードの応答は小さいため、次のようにr次（$r < n$）までの応答を重ね合わせれば実用上十分な場合が多い。

$$\{u\}_{\max} \approx \sqrt{\{u_{1\max}\}^2 + \{u_{2\max}\}^2 + \cdots + \{u_{r\max}\}^2}$$

$$\{Q\}_{\max} \approx \sqrt{\{Q_{1\max}\}^2 + \{Q_{2\max}\}^2 + \cdots + \{Q_{r\max}\}^2}$$

● $r<n$ である程度の精度の解が得られることは、解析時間を短くするために、大変有利である。

●たとえば、２００自由度の構造物の解析に、低次の３０次までのモードを考慮すれば十分ということもよくある。

●どの次数までを重ね合わせればよいかを知るためには、有効質量や刺激係数が参考になる。

3）応答スペクトル法の効用

●非連成のn個の1自由度系の最大応答を応答スペクトルを用いて解析するため、コンピューターの計算時間が少なくて済む。このため、計算機使用料が高価であった時代には、多用された。しかし、ＰＣが普及し、ＰＣレベルで解析可能となったため、計算コストを低減するために応答スペクトル法を使用することは減少している。

●応答スペクトル法の最大のメリットは、入力地震動として応答スペクトルを使用できることである。設計地震力は一般に応答スペクトルの形で与えられる。このため、設計スペクトルを直接入力することによって動的解析できるメリットは高い。同じことを、時刻歴応答解析法で実施するためには、設計スペクトルと同じスペクトル特性を有する時刻歴入力波形を作成し、これを入力しなければならない。しかし、仮に応答スペクトル特性が同じであっても、位相特性等、無限の組み合わせがあり、使用する波形によって解析結果が異なってくる。

●応答スペクトル法では、非線形構造物の解析はできない。線形解析だけが可能である。どうしても非線形構造物を応答スペクトル法で解析するためには、等価線形化法を使用することになるが、繰り返し計算をしてまで、応答スペクトル法を使用するくらいであれば、時刻歴応答解析法を使用する方がよい。

●等価線形化法とは、仮定する変位もしくはひずみに相当する割線剛性を用いて解析を行い、この結果求められた変位もしくはひずみが初期に仮定した変位もしくはひずみと異なれば、再度、変位もしくはひずみを仮定して、解析を行う方法である。最終的に、最初に仮定した変位もしくはひずみと解析で求められる変位もしくはひずみの差が許容される範囲に収まるまでイテレーションを繰り返す。

●1次モードだけを考慮した応答スペクトル法は、静的耐震設計法の基本となっている。2次以上のモードを考慮していないため、高次モードが重要な構造物に対しては、解析誤差が生じる。