

2010 年 4 月 8 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

線形代数学第一 講義資料 1

重要なお知らせ

受講希望者は、**本日の課題を必ず提出**してください。提出者リストがそのまま受講者名簿となります。
(正式な受講登録も忘れずに行ってください)
なお、今回に限り、提出場所を

本館 3 階 332B (数学事務室) 前のポスト ; 締切り : 4 月 9 日 13 時

に変更いたします。間違いなきように。

1 行列

■言葉 (§1.2)

- R ($\mathbb{R}$): 実数全体の集合, C ($\mathbb{C}$): 複素数全体の集合
- 行列, 行列のサイズ, 行, 列, (j, k) -成分
- 行ベクトル, 列ベクトル, m -項行 (列) ベクトル
- 正方行列, m 次正方行列, 対角成分, 対角行列.
- 転置行列 (${}^t A$), 随伴行列 ($A^* = {}^t \overline{A}$).
- 対称行列, 歪対称行列, エルミート行列, 歪エルミート行列.

■演算 (§1.2) どのようなサイズの行列に対して定義されるか / 数の演算との違いは何か.

- 和, 差, 零行列
- 定数倍またはスカラー倍
- 積, 単位行列

■正則行列 (§1.3)

- 逆行列, 正則行列
- 正方行列 A の逆行列は存在すればただ一つである.

問題

- 1 $m \times k$ 行列 A と $k \times n$ 行列 B に対して ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ であることを証明しなさい.
- 2 正方行列 A に対してその対角成分の総和を A の**跡** または **トレース** といって, $\text{tr } A$ とかく.
 - ふたつの n 次正方行列 A, B に対して $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ が成り立つことを証明しなさい.
 - 実数を成分とする正方行列 A に対して, $\text{tr}({}^tAA) \geq 0$ であることを証明しなさい. 等号が成り立つのはどんなときか.
 - 一般に複素数を成分とする正方行列に対して, $\text{tr}(A^*A)$ は負でない実数になることを証明しなさい.
- 3 $A^2 - 3A + 2E = O$ を満たす 2 次正方行列を全て求めなさい.
- 4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して

$$(A+B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2) = O$$

となるような 2 次正方行列 B をすべて求めなさい.