

線形代数学第一 定期試験〔問題 1〕

注意事項

- 解答は、解答用紙の所定の欄に、採点者が読みとり、理解することができるように書いてください。
- 裏面・計算用紙は下書き、計算などに使用して良いですが、採点の対象とはしません。
- 試験終了後は、解答用紙すべてと持込用紙を回収します。持込用紙には学籍番号と氏名を記してください。問題用紙は持ち帰っていただいて結構です。
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません。問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し、正しいと思われる問題に直して解答してください。
- 答えは 8 月 4 日（水）11 時から 12 時 30 分までの間、山田の部屋にて返却いたします（毎回提出物を出していただいた部屋です）。それ以降は数学事務室（本館 3 階 332B）に預けますのでそちらで受け取って下さい。なお、8 月 4 日午後から 9 日までは山田は捕まりませんのでご承知おきください。
- 採点に関して質問・クレームなどがある方は、8 月 10 日（火）10 時から 12 時の間、山田の部屋にて受け付けます。質問・クレームがあるが、この日に都合が悪く出てこられない、という方は、8 月 9 日までに電子メールにてその旨ご連絡ください。なお、(1) 対象は書かれた答案です。答案に書かれていないことは議論の対象としません。(2) 管理の都合上、上記期日以降のクレームは、たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません。ご了承下さい。

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の [1] ~ [14] にもっともよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい。 [45 点]

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

は [1] 型行列であり、その (2, 4)-成分は [2] である。行列 A を左基本変形により簡約化すると、簡約な行列 $B = [3]$ が得られるから、とくに $\text{rank } A = [4]$ である。

いま、行列 A が定める線型写像 $T_A: R^{[5]} \rightarrow R^{[6]}$ を考える。たとえば、すべての成分が 1 であるような $R^{[5]}$ の要素 a に対して $b = T_A(a)$ とおくと $b = [7]$ である。

線型写像 T_A の像を $\text{Im } T_A$ 、核を $\text{Ker } T_A$ と書く。すると $\text{Im } T_A$ は、1 次独立なベクトルが生成する $R^{[8]}$ の部分空間として [9] と表される。また、 $\text{Ker } T_A$ は、1 次独立なベクトルが生成する $R^{[10]}$ の部分空間として [11] と表される。したがって $\dim \text{Im } T_A = [12]$ 、 $\dim \text{Ker } T_A = [13]$ である。

ここで、連立 1 次方程式 $Ax = b$ ($b = [7]$) を考えると、 a はその一つの解であるから、この連立 1 次方程式の解全体の集合は [14] と書ける。

裏面につづく

問題 B 次を求めなさい [20 点]

- (1) 5 次正方行列 A の行列式が 2 であるとき, A の余因子行列 $\tilde{A}$ の行列式.
- (2) 10 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が $a_{ij} = ij$ で与えられているとき, A の対角成分の総和.
- (3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ のとき A^{-1} .
- (4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき $A - tE$ が正則でないような実数 t .

問題 C 次ののは正しいか. 正しいければ○, そうでなければ×を解答欄の [] 内に記し, その理由を述べなさい. [30 点]

- (1) 一般に対角行列でない相異なる 2 つの m 次正方行列 A, B に対して $AB \neq BA$.
- (2) 2 つの上三角行列の積は上三角行列である.
- (3) 一般に m 次正方行列 A に対して $A^2 - (\text{tr } A)A + (\det A)E = O$.
- (4) 一般に m 次正方行列 A と m 次正則行列 P に対して $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr } A$.
- (5) 一般に m 次正方行列 A, B に対して $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- (6) 線型写像 $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ の核 $\text{Ker } T$ は $\mathbf{R}^n$ の部分空間である.

問題 D [0 点] 解答用紙 4 をご覧ください.

問題 E [5 点] 解答用紙 4 をご覧ください.

線形代数学第一 定期試験 [解答用紙 1]

問題 A の解答欄 配点 : 1-2, 3-4, 5-6, 8-9 , 10-11:5 点; 7, 12, 13, 14: 5 点

1 4×5	2 2	3 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4 3
5 5	6 4	7 $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$	
8 4	9 $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R} \right\}$		
10 5	11 $\left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}$		
12 3	13 2	14 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}$	

学籍番号	氏 名
------	-----

線形代数学第一 定期試験 [解答用紙 2]

問題 B の解答欄

(1)	(2)	(3)	(4)
16	385	$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 & 11 & -7 \\ 3 & -8 & 7 \\ 6 & -9 & 7 \end{pmatrix}$	$1, 7, \pm\sqrt{5}$

問題 C の解答欄

(1) [×] $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ とすると, $AB = BA = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.
(2) [○] 2 つの m 次上三角行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ をとると, 上三角行列であることから, $1 \leq j < i \leq m$ を満たす各 (i, j) に対して $a_{ij} = 0, b_{ij} = 0$ である. すると $1 \leq j < i \leq m$ を満たす (i, j) に対して AB の (i, j) 成分は, $a_{il} = 0$ ($l = i + 1, \dots, m$), $b_{lj} = 0$ ($l = 1, \dots, j - 1$) かつ $i - 1 \geq j$ だから, $\sum_{l=1}^m a_{il}b_{lj} = \sum_{l=1}^i a_{il}b_{lj} = 0.$ したがって AB は上三角行列である.
(3) [×] 1 次正方行列 $A = (1)$ に対して $A^2 - (\text{tr } A)A + (\det A)E = (1) \neq O$.

学籍番号	氏 名
------	-----

線形代数学第一 定期試験 [解答用紙 3]

問題 C の解答欄 (つづき)

(4) [○]

一般に, m 次正方行列 A, B に対して $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ だから

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(P^{-1}(AP)) = \operatorname{tr}((AP)P^{-1}) = \operatorname{tr}(A(P P^{-1})) = \operatorname{tr} A.$$

(5) [×]

A, B を 2 次の単位行列とすると, $\det A = \det B = 1$, $\det(A+B) = \det 2E = 4$ である.

(6) [○]

$\operatorname{Ker} T = \{x \in \mathbf{R}^n; T(x) = 0\}$ である. そこで

- $x, y \in \operatorname{Ker} T$ とすると, $T(x) = 0, T(y) = 0$ である. したがって $T(x+y) = T(x) + T(y) = 0 + 0 = 0$. したがって $x+y \in \operatorname{Ker} T$.
- $x \in \operatorname{Ker} T, \lambda \in \mathbf{R}$ とすると $T(x) = 0$ だから $T(kx+y) = kT(x) = k0 = 0$. したがって $kx \in \operatorname{Ker} T$.

学籍番号

氏 名

線形代数学第一 定期試験 [解答用紙 4]

この用紙には、問題 D, E への回答および学籍番号・氏名以外は記入しないこと

問題 D この科目の授業、教材、試験などについて、御意見、ご希望、誹謗、中傷など、なんでもご自由にお書きください。なお、この問いへの回答は成績に一切関係ありません。 [0 点]

回答欄：

問題 E (アンケート) [内容に関わらず質問の回答として正しい日本語の文章が書かれていれば 5 点]

2011 年度より学年暦（授業のスケジュール）が、一学期の講義を 15 回とする形に改訂される予定です。そのため、定期試験の終了時期が遅くなることとなりますが、現在の案では、定期試験期間を短縮して 1 週間 + 2 日とし、その 2 日に、受講者の多い全学科目などの試験を行うことになっています。1 年生に関しては、その 2 日で、たとえば物理学・化学・数学の試験がすべて行われる、ということになります。結果として、たとえば同じ日に微分積分学と線形代数学の試験が行われることが考えられています。これについてのご意見をお知らせください。

回答欄：

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面の座席表にしたがって着席してください。

試験開始： 次の条件が満たされましたら、解答用紙・問題用紙を配布します：(1) 受験者が着席していること (2) 各受験者が、筆記用具・持ち込み用紙・必需品以外の持ち物を鞆に入れ、机の下か足元に置いていること (3) 私語がないこと。

試験中： ● 原則として終了時刻までは退室禁止です。やむを得ない場合は監督者に申し出て下さい。

● 試験中は私語や「前の人の椅子を蹴る」など他の受験者の邪魔になることはご遠慮ください。

試験終了・回収： 指示に従わない場合、不正行為とみなすことがあります。

● 終了の合図がありましたら、筆記用具をおいてください。

● 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい。私語は禁止。

● 答案は、上から、解答用紙 1, 解答用紙 2, 解答用紙 3, 解答用紙 4, 持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください。

● 解答用紙を教室の最右端の壁際から左、最左端の壁際まで送ります。その際、自分の答案用紙を、受け取った答案用紙の束の上に重ねてください。

● 教室最左端の席の方は、答案用紙の束を机の上おき、回収を待ってください。試験監督が回収を行います。

● すべての答案の回収が終わった時点で終了です。

学籍番号

氏 名