このノートでは、$int(X) \neq \emptyset$ の場合のみ解説します．$int(X) = \emptyset$ の場合については、次回講義で説明します．また、このノートの参考文献は

丸山徹「経済数学」知泉書館　2002 年

です．

主張 4・ケース 2 の証明

主張 4 $\lim_{n\to\infty} a^n = a$ となるような $\mathbb{R}^\ell \setminus X$ における点列 $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する．

ケース 2 $a \in cl(X)$.

(上記の記号の意味については講義内容を参照のこと.)

証明にあたり次の補題を証明する．

補題 A $Z \subset \mathbb{R}^\ell$ を $int(Z) \neq \emptyset$ であるような凸集合とする．このとき、任意の $x \in int(Z)$、$y \in cl(Z)$ および $\lambda \in]0,1[$ について、$\lambda x + (1-\lambda)y \in int(Z)$ となる．

証明 $x \in int(Z)$、$y \in cl(Z)$ を任意に選び固定する．また、$\lambda \in]0,1[$ を任意に選び固定する．x は Z の内点であるから、ある $\varepsilon > 0$ が存在し、$B_\varepsilon(x) \subset Z$ となる．また、$y \in cl(Z)$ より、$Z \cap B_{\frac{\lambda^2\varepsilon}{1-\lambda}}(y) \neq \emptyset$ となるので、$y' \in Z \cap B_{\frac{\lambda^2\varepsilon}{1-\lambda}}(y)$ を任意に選び固定する．

$z = \lambda x + (1-\lambda)y$ と定義する．$z' \in B_{\lambda(1-\lambda)\varepsilon}(z)$ を任意に選び固定する．さらに、

$$x' = x + \frac{1}{\lambda}(z' - z) + \frac{1-\lambda}{\lambda}(y - y')$$

と定義する．すると、y', z' の選び方より

$$\begin{aligned}
||x' - x|| &= \left|\left| x + \frac{1}{\lambda}(z' - z) + \frac{1-\lambda}{\lambda}(y - y') - x \right|\right| \\
&\leq \frac{1}{\lambda}||z' - z|| + \frac{1-\lambda}{\lambda}||y - y'|| \\
&< \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda(1-\lambda)\varepsilon + \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^2\varepsilon}{1-\lambda}\varepsilon \\
&= (1-\lambda)\varepsilon + \lambda\varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

となる．したがって、$x' \in B_\varepsilon(x)$ となるので、$x' \in Z$.

一方、

$$\begin{aligned}\lambda x' + (1-\lambda)y' &= \lambda x + (z'-z) + (1-\lambda)(y-y') + (1-\lambda)y + (1-\lambda)(y'-y)\\ &= \lambda x + (1-\lambda)y + (z'-z)\\ &= z + (z'-z)\\ &= z'\end{aligned}$$

となる．$x' \in Z$ かつ $y' \in Z$ および Z が凸集合であったことから、$z' \in Z$ となる．したがって、$z \in int(Z)$. ■

主張 4・ケース 2 の証明に戻る．まず、$int(cl(X)) = int(X)$ を証明する．

最初に $int(X) \subset int(cl(X))$ を示す．$z \in int(X)$ を任意に選び固定する．すると、ある $\varepsilon > 0$ が存在し、$B_\varepsilon(z) \subset X$ となる．$X \subset cl(X)$ より、$B_\varepsilon(z) \subset cl(X)$ となる．したがって、$x \in int(cl(X))$.

続いて $int(cl(X)) \subset int(X)$ を示す．$b \in int(cl(X))$ を任意に選び固定する．また、$c \in int(X)$ を任意に選び固定する．さらに、それぞれの $\lambda \in [0,1]$ に対し、

$$b(\lambda) = b + \lambda(b-c)$$

と定義する．

$b \in int(cl(X))$ より、ある $\delta > 0$ が存在し、$B_\delta(b) \subset cl(X)$ となる．ここで、$\lim_{\lambda\to 0} ||\lambda(b-c)|| = 0$ より、ある $\bar{\lambda} \in]0,1[$ が存在し、$||\bar{\lambda}(b-c)|| < \delta$ となる．よって、$b(\bar{\lambda}) \in cl(X)$ となる．

一方、$b(\bar{\lambda})$ の定義より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\bar{\lambda}}b(\bar{\lambda}) + \frac{\bar{\lambda}}{1+\bar{\lambda}}c &= \frac{1}{1+\bar{\lambda}}(b + \bar{\lambda}(b-c)) + \frac{\bar{\lambda}}{1+\bar{\lambda}}c\\ &= \frac{1}{1+\bar{\lambda}}b + \frac{\bar{\lambda}}{1+\bar{\lambda}}b - \frac{\bar{\lambda}}{1+\bar{\lambda}}c + \frac{\bar{\lambda}}{1+\bar{\lambda}}c\\ &= b\end{aligned}$$

となる．したがって、補題 A より $b \in int(X)$ となる．

ここで、$a \in cl(X)$ かつ $a \notin X$ であった．$int(X) \subset X$ より $a \notin int(X)$．今 $int(cl(X)) = int(X)$ を示したので、a は $cl(X)$ の境界に含まれていることになる．したがって、命題 12 より任意の $n \in \mathbb{N}$ について、$B_{\frac{1}{n}}(a) \cap (\mathbb{R}^\ell \setminus cl(X)) \neq \emptyset$

となる．各 n について、a^n を $B_{\frac{1}{n}}(a) \cap (\mathbb{R}^\ell \setminus cl(X))$ から任意に選び固定する．それらによって構成された点列 $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は、その選び方より、

- それぞれの $n \in \mathbb{N}$ について、$a^n \in \mathbb{R}^\ell \setminus cl(X)$;
- $\lim_{n\to\infty} a^n = a$

となっている． ■