位相と凸解析
対応、対応の連続性

平井　俊行

12　対応

定義 36 $X \subset \mathbb{R}^\ell$、$Y \subset \mathbb{R}^{\ell'}$ とする．このとき、任意の $x \in X$ に対して、$F(x) \subset Y$ を割り当てる関係 F を X から Y への対応と呼び、$F : X \twoheadrightarrow Y$ と記述する．

注意 13 $X \subset \mathbb{R}^\ell$、$Y \subset \mathbb{R}^{\ell'}$ とする．X から Y への対応 $F : X \twoheadrightarrow Y$ は、X から 2^Y への関数 $F : X \to 2^Y$ とみることもできる．ただし、

$$2^Y = \{Y' |\, Y' \subset Y\}$$

である．

定義 37 $X \subset \mathbb{R}^\ell$、$Y \subset \mathbb{R}^{\ell'}$ とし、$F : X \twoheadrightarrow Y$ とする．このとき、

- 任意の $x \in X$ について、$F(x) \neq \emptyset$ となるとき、F を非空値な対応と呼ぶ.
- 任意の $x \in X$ について、$F(x)$ が閉集合となるとき、F を閉値な対応と呼ぶ.
- 任意の $x \in X$ について、$F(x)$ が凸集合となるとき、F を凸値な対応と呼ぶ.
- 任意の $x \in X$ について、$F(x)$ がコンパクト集合となるとき、F をコンパクト値な対応と呼ぶ.
- 任意の $x \in X$ について、$F(x)$ が常にただ 1 つの要素のみを含むとき、F を一点値な対応と呼ぶ.

注意 14 $X \subset \mathbb{R}^\ell$、$Y \subset \mathbb{R}^{\ell'}$ とし、$F : X \twoheadrightarrow Y$ とする．F が一点値な対応であれば、F が非空値、閉値、凸値、コンパクト値な対応であることを導く．また、F が一点値であれば、F は関数と同じように扱うことができる．もちろん F がコンパクト値であれば、F が閉値であることを導く．

13　対応の連続性

13.1　優半連続性

定義 38 $X \subset \mathbb{R}^\ell, Y \subset \mathbb{R}^{\ell'}$ とし、$F : X \twoheadrightarrow Y$ とする．このとき、F が $x \in X$ において優半連続であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在し、

$$\bigcup_{x' \in B_\delta(x)} F(x') \subset \bigcup_{y \in F(x)} B_\varepsilon(y)$$

となることである．また、F が任意の $x \in X$ において優半連続ならば、F は X 上で優半連続、または単に優半連続であるという．

命題 34 $X \subset \mathbb{R}^\ell, Y \subset \mathbb{R}^{\ell'}$ とし、$F : X \twoheadrightarrow Y$ を一点値対応とする．また、$f : X \to Y$ を任意の $x \in X$ について、$f(x) = y$ であることの必要十分条件が $F(x) = \{y\}$ であるような関数とする．このとき、F が $x \in X$ において優半連続ならば、f は x において連続である．

命題 35 $X \subset \mathbb{R}^\ell$、$Y \subset \mathbb{R}^{\ell'}$ とする．また、$F : X \twoheadrightarrow Y$ を非空コンパクト値な対応とする．このとき、F が $x \in X$ において優半連続であるための必要十分条件は、$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\lim_{n\to\infty} x^n = x$ となるような X における任意の収束点列とし、$(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を各 $n \in \mathbb{N}$ について任意に $y^n \in F(x^n)$ を選んで構成した点列としたとき、、$\lim_{n\to\infty} y^{\xi(n)} \in F(x)$ となるような $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束部分列 $(y^{\xi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ が存在することである．

定義 39 $X \subset \mathbb{R}^\ell$、$Y \subset \mathbb{R}^{\ell'}$ とする．$F : X \twoheadrightarrow Y$ が閉グラフを持っているとは、

$$\{(x, y) \in X \times Y |\ y \in F(x)\}$$

が $X \times Y$ における閉集合となることである．

命題 36 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とし、$Y \subset \mathbb{R}^{\ell'}$ をコンパクト集合とする．また、$F : X \twoheadrightarrow Y$ を非空閉値な対応とする．このとき、F が優半連続であるための必要十分条件は F が閉グラフを持つことである．

命題 37 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とし、それぞれの $i = 1, ..., k$ について $Y_i \subset \mathbb{R}^{\ell_i}$ とする．また、それぞれの $i = 1, ..., k$ について $F_i : X \twoheadrightarrow Y_i$ をコンパクト値な対応とする．もし、それぞれの $i = 1, ..., k$ について F_i が優半連続ならば、任意の $x \in X$ について $F(x) = \prod_{i=1}^k F_i(x)$ であるような対応 $F : X \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^k Y_i$ は優半連続である．

13.2　劣半連続性

定義 40 $X \subset \mathbb{R}^\ell, Y \subset \mathbb{R}^{\ell'}$ とし、$F : X \twoheadrightarrow Y$ とする．F が $x \in X$ において劣半連続であるとは、$\lim_{n\to\infty} x^n = x$ であるような X における任意の点列

$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ および任意の $y \in F(x)$ に対し、$\lim_{n\to\infty} y^n = y$ かつ各 $n \in \mathbb{N}$ について $y^n \in F(x^n)$ であるような Y における点列 $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在することである．また、F が任意の $x \in X$ において劣半連続でならば、F は X 上で劣半連続、または単に劣半連続であるという．

命題 38 $X \subset \mathbb{R}^\ell$, $Y \subset \mathbb{R}^{\ell'}$ とし、$F : X \twoheadrightarrow Y$ を一点値対応とする．また、$f : X \to Y$ を任意の $x \in X$ について、$f(x) = y$ であることの必要十分条件が $F(x) = \{y\}$ であるような関数とする．このとき、F が $x \in X$ において劣半連続ならば、f は x において連続である．

命題 39 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とする．また、それぞれの $i = 1, ..., k$ について $Y_i \subset \mathbb{R}^{\ell_i}$ とし、$F_i : X \twoheadrightarrow Y_i$ とする．もし、それぞれの $i = 1, ..., k$ について F_i が劣半連続ならば、任意の $x \in X$ について $F(x) = \prod_{i=1}^k F_i(x)$ であるような対応 $F : X \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^k Y_i$ は劣半連続である．