命題 33 の証明の残り

最大の誤りは、一般的な距離の性質だけで証明しようとしたことのようでした．2 回目くらいの講義で、ユークリッド距離以外にも実ベクトル集合上に定義できる距離があることを紹介したと思いますが、それらを使えば反例が作れます.（もちろん、一意性についての反例です.）ですから、一般的な距離の性質のみを用いた証明が成功するはずがありません．宿題というわけではありませんが、各自反例を考えてみてください.

X を非空な閉凸集合とする。また、$a \notin X$ とする.

このとき、

- $X^* = \{x \in X |$ 任意の $x' \in X$ について $||x-a|| \leq ||x'-a||\}$ が非空であること.
- $x, y \in X^*$ を任意に選んで固定したとする[1]．そのとき、
$$||x-a|| = ||y-a|| = \left|\left|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - a\right|\right| \tag{1}$$
となること.

は講義中に証明したものとする.

このとき、

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - a\right|\right|^2 &= \left|\left|\frac{1}{2}(x-a) + \frac{1}{2}(y-a)\right|\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{1}{2}(x_i - a_i) + \frac{1}{2}(y_i - a_i)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\ell}(x_i - a_i)^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\ell}(y_i - a_i)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell}(x_i - a_i)(y_i - a_i) \\
&= \frac{1}{4}||x-a||^2 + \frac{1}{4}||y-a||^2 + \frac{1}{2}(x-a)\cdot(y-a)
\end{aligned} \tag{2}$$

となる．一方、$||x-a|| = ||y-a||$ であることに留意すると、

$$\begin{aligned}
||x-a||^2 &= \frac{1}{4}||x-a||^2 + \frac{1}{4}||y-a||^2 + \frac{1}{2}||x-a|| \\
&= \frac{1}{4}||x-a||^2 + \frac{1}{4}||y-a||^2 + \frac{1}{2}(x-a)\cdot(x-a)
\end{aligned} \tag{3}$$

[1]任意に選ぶという部分は講義中の証明と異なっていると思います．ですので、必ずしも異なる 2 点でなくともよいということです.

および

$$
\begin{aligned}
||y-a||^2 &= \frac{1}{4}||x-a||^2 + \frac{1}{4}||y-a||^2 + \frac{1}{2}||y-a|| \\
&= \frac{1}{4}||x-a||^2 + \frac{1}{4}||y-a||^2 + \frac{1}{2}(y-a)\cdot(y-a)
\end{aligned} \tag{4}
$$

を得る.

このとき (1) より、(2)=(3) となるので、

$$
\begin{aligned}
0 &= (x-a)\cdot(x-a) - (x-a)\cdot(y-a) \\
&= (x-a)\cdot(x-y).
\end{aligned} \tag{5}
$$

同様に、(2)=(4) より、

$$
\begin{aligned}
0 &= (y-a)\cdot(y-a) - (x-a)\cdot(y-a) \\
&= (y-a)\cdot(y-x)
\end{aligned} \tag{6}
$$

を得る.

すると、(5),(6) より

$$
\begin{aligned}
||x-y||^2 &= (x-y)\cdot(x-y) \\
&= (x-a+a-y)\cdot(x-y) \\
&= (x-a)\cdot(x-y) + (a-y)\cdot(x-y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

を得る．よって、$x=y$. ここで x, y は X^* から任意に選んだものであったから、X^* は一点集合でなければならない.