位相と凸解析
凸集合の分離定理

平井　俊行

11　凸集合の分離定理

定義 35 $\mathbb{R}^\ell$ における超平面とは，ある $p \in \mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}$ と $m \in \mathbb{R}$ について，

$$H(p,m) = \left\{ x \in \mathbb{R}^\ell \mid p \cdot x = m \right\}$$

となる集合である．

注意 12 超平面を図示すると，$\ell = 2$ であれば直線，$\ell = 3$ であれば平面となる．

命題 33 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ を非空な閉凸集合とし，$a \notin X$ とする．このとき，$||x - a||$ を最小にするような $x \in X$ が唯 1 つ存在する．

定理 2 $C \subset \mathbb{R}^\ell$ を非空な閉凸集合とし，$a \notin C$ とする．このとき，任意の $x \in C$ について

$$p \cdot x > p \cdot a$$

となるような $p \in \mathbb{R}^n$，ただし $p \neq 0$ が存在する．

定理 3 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ を非空な凸集合とし，$a \notin X$ とする．このとき，任意の $x \in X$ について

$$p \cdot x \geq p \cdot a$$

となるような $p \in \mathbb{R}^n$，ただし $p \neq 0$ が存在する．

定理 4 $C, D \subset \mathbb{R}^n$ を $C \cap D = \emptyset$ であるような非空な凸集合とする．このとき，任意の $x \in C$ と任意の $y \in D$ について

$$p \cdot x \geq p \cdot y$$

となるような $p \in \mathbb{R}^n$，ただし $p \neq 0$ が存在する．
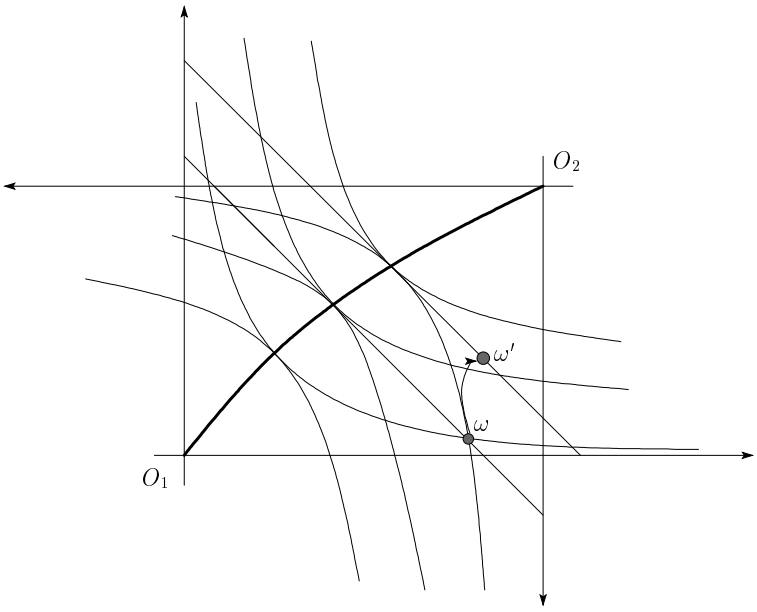
Figure 1: Edgeworth Box における第 2 基本定理