位相と凸解析
凸集合、凸関数、凸性と最適化

平井　俊行

8　凸集合

定義 30 集合 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ が凸集合であるとは，任意の $x, y \in X$ と任意の $\lambda \in [0,1]$ について，

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in X$$

となることである．

定義 30 の $\lambda x + (1-\lambda)y$ (ただし $\lambda \in [0,1]$) を x と y の凸結合と呼ぶ．

命題 25 $x \in \mathbb{R}^\ell$ とする．また、λ を正の実数とする．このとき、x を中心とする半径 λ の閉球

$$\{y \in \mathbb{R}^\ell |\ ||y-x|| \leq \lambda\}$$

および開球

$$\{y \in \mathbb{R}^\ell |\ ||y-x|| < \lambda\}$$

は凸集合である．

命題 26 A と B が両方とも凸集合ならば，$A \cap B$ も凸集合である．

問題 8 命題 26 を証明せよ．また，$A \cup B$ は凸集合にならない場合があるが，そのような例を示せ．

問題 9 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ が凸集合であったとする．このとき、$cl(X)$ も凸集合であることを示しなさい．

9 凸関数

凸関数・凹関数・準凸関数・準凹関数の定義及び基本的な性質を導入する．以下の定義より，これらはすべて凸集合上に定義されなければならないことに注意されたい．

定義 31 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ を凸集合とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が凸関数であるとは，任意の $x, y \in X$ と任意の $\lambda \in [0,1]$ について，

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

となっていることである．また，上の不等式が，$x \neq y$ ならば常に厳密な不等号で成立するならば，f は狭義凸関数と呼ばれる．

定義 32 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ を凸集合とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が凹関数であるとは，任意の $x, y \in X$ と任意の $\lambda \in [0, 1]$ について，

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

となっていることである．また，上の不等式が，$x \neq y$ ならば常に厳密な不等号で成立するならば，f は狭義凹関数と呼ばれる．

注意 10 定義より次の 2 つのことが明らかであろう．

1. f が凸関数ならば，$-f$ は凹関数である．
2. f が凹関数ならば，$-f$ は凸関数である．

命題 27 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とする．$f : X \to \mathbb{R}$ が凸関数であることの必要十分条件はは，集合

$$U(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} |\ f(x) \leq y\}$$

が凸集合となることである．

命題 28 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ を凸集合とする．$f : X \to \mathbb{R}$ が凹関数であることの必要十分条件は、集合

$$U(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} |\ f(x) \geq y, x \in X\}$$

が凸集合となることである．

問題 10 命題 28 を証明せよ．

定義 33 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ を凸集合とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が準凸関数であるとは，任意の $x, y \in X$ および任意の $\lambda \in [0, 1]$ について，

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

となっていることである．また，上の不等式が，$x \neq y$ ならば常に厳密な不等号で成立するならば，f は狭義準凸関数と呼ばれる．

定義 34 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ を凸集合とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が準凹関数であるとは，任意の $x, y \in X$ および任意の $\lambda \in [0, 1]$ について，

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$$

となっていることである．また，上の不等式が，$x \neq y$ ならば常に厳密な不等号で成立するならば，f は狭義準凹関数と呼ばれる．

注意 11 注意 10 と同じようなことが，こちらについても直ちにわかる．

1. f が準凸関数ならば，$-f$ は準凹関数である．
2. f が準凹関数ならば，$-f$ は準凸関数である．

命題 29 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ を凸集合とする．$f : X \to \mathbb{R}$ が準凸関数であることの必要十分条件は、集合

$$V(a) = \{x \in X |\ f(x) \leq a\}$$

が任意の $a \in \mathbb{R}$ について凸集合となることである．

問題 11 命題 29 を証明せよ．

命題 30 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とする．$f : X \to \mathbb{R}$ が準凹関数であることの必要十分条件は、集合

$$V(a) = \{x \in X |\ f(x) \geq a\}$$

が任意の $a \in \mathbb{R}$ について凸集合となることである．

命題 31 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とし、$f : X \to \mathbb{R}$ とする．

1. f が凸関数ならば，f は準凸関数である．
2. f が凹関数ならば，f は準凹関数である．

問題 12 命題 31 の 1 を証明せよ．

問題 13 命題 31 の逆は成立しない．準凸関数であるが，凸関数でない例を示せ．また，準凹関数であるが，凹関数でない例を示せ．

問題 14 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とし、$u : X \to \mathbb{R}$ とする．このとき $u(x)$ が凹関数であることの必要十分条件が $U(x, m) = u(x) + m$ が準凹関数であることを示しなさい．

10 凸性と最適化

Bolzano=Weierstrass の定理より、コンパクト集合上の連続関数は最大値および最小値を持つことが分かっている．この関数が何らかの凸性を満たしている場合、最大値もしくは最小値を与える要素に対し、凸性による特徴づけを行うことができる．

命題 32 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ を非空コンパクト凸集合とし、$f : X \to \mathbb{R}$ を X 上で連続な関数とする.

1. f が準凸関数ならば、$M_*(f) = \{x \in X |\ f(x) \leq f(x'),\ \forall x' \in X\}$ は非空なコンパクト凸集合となる.
2. f が狭義準凸関数ならば、$M_*(f)$ は X のただ 1 つの要素を含む.
3. f が準凹関数ならば、$M^*(f) = \{x \in X |\ f(x) \geq f(x'),\ \forall x' \in X\}$ は非空なコンパクト凸集合となる.
4. f が狭義準凹関数ならば、$M^*(f)$ は X のただ 1 つの要素を含む.