位相と凸解析
コンパクト集合

平井　俊行

6　コンパクト集合

経済学やゲーム理論では最適化を考えることが多い．コンパクト集合は、その際に重要な役割を担う．

定義 25 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ が有界であるとは、ある $M > 0$ が存在して、任意の $x \in X$ について、$||x|| \leq M$ とできることである．

命題 13 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ が有界であることの必要十分条件は、ある $z, z' \in \mathbb{R}^\ell$ が存在して、任意の $x \in X$ について、$z' \leq x \leq z$ とできることである．

注意 8 特に $X \subset \mathbb{R}$ のとき、X における点列と同様に、上界、上に有界、上限、下界、下に有界、下限がそれぞれ以下のように定義できる．

- $z \in \mathbb{R}$ が X の上界であるとは、任意の $x \in X$ について $z \geq x$ となることである．
- X が上に有界であるとは、X の上界が存在することである．
- $x^* \in \mathbb{R}$ が X の上限であるとは、x^* が X の上界でかつ X のすべての上界 y に対して $y \geq x^*$ となることである．
- $z' \in \mathbb{R}$ が X の下界であるとは、任意の $x \in X$ について $z' \leq x$ となることである．
- X が下に有界であるとは、X の下界が存在することである．
- $x_* \in \mathbb{R}$ が X の下限であるとは、x_* が X の下界でかつ X のすべての下界 y に対して $y \leq x^*$ となることである．

また、X の上限および下限をそれぞれ $\sup X$ および $\inf X$ とあらわす．さらに命題 3 の証明と同様にして X が上に有界ならば $\sup X$ が存在し、X が下に有界ならば $\inf X$ が存在することが保証できる．

定義 26 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ がコンパクト集合であるとは、X が有界な閉集合であることをいう．

命題 14 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ が有界であることの必要十分条件は、X における任意の点列 $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ が必ず収束部分列を持つことである．

補題 2 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ とする．このとき、$[a,b]$ における任意の点列 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は必ず収束部分列を持つ.

補題 3 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ を有界な集合とする．このとき、X における点列 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は必ず収束部分列を持つ.

命題 15 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ がコンパクト集合であることの必要十分条件は、X における任意の点列 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ について $\lim_{n\to\infty} x^{\xi(n)} \in X$ となるような収束部分列 $(x^{\xi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ が存在することである.

命題 16 それぞれの $i = 1, ..., k$ について $X_i \subset \mathbb{R}^{\ell_i}$ がコンパクト集合であるとする．このとき、$\times_{i=1}^k X_i \subset \mathbb{R}^{\ell_1+\cdots+\ell_k}$ もコンパクト集合となる.