位相と凸解析
開集合と閉集合

平井　俊行

5　開集合と閉集合

定義 18 集合 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ が開集合であるとは、任意の $x \in X$ について、ある ε が存在して、$||x - x'|| < \varepsilon$ であるような任意の x' が X に含まれることである.

定義 19 集合 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ が閉集合であるとは、$\mathbb{R}^\ell \setminus X$ が開集合であることである.

定義 20 $\bar{X} \subset \mathbb{R}^\ell$ とする. $X \subset \bar{X}$ が $\bar{X}$ における開集合であるとは、任意の $x \in X$ について、ある ε が存在して、$||x - x'|| < \varepsilon$ かつ $x' \in \bar{X}$ であるような任意の x' が X に含まれることである.

定義 21 $\bar{X} \subset \mathbb{R}^\ell$ とする. $X \subset \bar{X}$ が $\bar{X}$ における閉集合であるとは、$\bar{X} \setminus X$ が $\bar{X}$ における開集合であることである.

本講義では、$\mathbb{R}^\ell$ における開集合、閉集合については特に断りなく単に開集合、閉集合と呼ぶことにする.

命題 9 $\bar{X} \subset \mathbb{R}^\ell$ とする. $X \subset \bar{X}$ が $\bar{X}$ における閉集合であるための必要十分条件は、X における任意の収束点列 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ について $\lim_{n\to\infty} x^n \in \bar{X}$ ならば $\lim_{n\to\infty} x^n \in X$ となることである.

系 2 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ が閉集合であるための必要十分条件は、X における任意の収束点列 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ について $\lim_{n\to\infty} x^n \in X$ となることである.

命題 10 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とする.

(1) 有限個の X における開集合の共通部分は X における開集合である.

(2) 任意個の X における開集合の合併は X における開集合である.

命題 11 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とする.

(1) 有限個の X における閉集合の合併は X における閉集合である.

(2) 任意個の X における閉集合の共通部分は X における閉集合である.

問題 5

(1) $\bigcap_{\lambda\in[0,1]}]-\lambda,\lambda[=\{0\}$ を証明しなさい.

(2) $\bigcup_{\theta\in]0,1[}[-\theta,\theta]=]-1,1[$ を証明しなさい.

定義 22 $X\subset X'\subset\mathbb{R}^\ell$ とする．X を含むすべての X' における閉集合の共通部分を X の閉包と呼び、$cl_{X'}(X)$ などとあらわす.

定義 23 $X\subset X'\subset\mathbb{R}^\ell$ とする．$x\in X$ が X' における X の内点であるとは、ある $\varepsilon>0$ が存在して、$||x'-x||<\varepsilon$ かつ $x'\in X'$ となるような任意の x' が X に含まれることである．また、X' における X の内点をすべて集めた集合を X の X' における相対内部と呼び、$int_{X'}(X)$ などとあらわす.

定義 24 $X\subset X'\subset\mathbb{R}^\ell$ とする．$cl_{X'}(X)\setminus int_{X'}(X)$ を X' における X の境界と呼ぶ.

命題 12 $\emptyset\neq X'\subset\mathbb{R}^\ell$ とし、$\emptyset\neq X\subset X'$ とする．$x\in\mathbb{R}^\ell$ が X' における X の境界に含まれていることの必要十分条件は、任意の $\varepsilon>0$ について

1. $B_\varepsilon(x)\cap X\neq\emptyset$ かつ
2. $(B_\varepsilon(x)\cap X')\cap(X^c)\neq\emptyset$

が成立することである.