位相と凸解析
内積・ノルム・距離

平井　俊行

3　内積・ノルム・距離

ℓ を任意に選んだ自然数として固定し、以下の議論を進める.

定義 5 $x, y \in \mathbb{R}^\ell$ とする．ただし、$x = (x_1, ..., x_\ell)$, $y = (y_1, ..., y_\ell)$．このとき、$x \cdot y = \sum_{i=1}^{\ell} x_i y_i$ を x と y の内積と呼ぶ.

$x, y, z \in \mathbb{R}^\ell$ および $a \in \mathbb{R}$ を任意に選んで固定すると、以下の性質が満たされる.

1. $x \cdot x \geq 0$
2. $x \cdot x = 0 \iff x = 0$
3. $x \cdot y = y \cdot x$
4. $(ax) \cdot y = a(x \cdot y)$
5. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

定義 6 $x \in \mathbb{R}^\ell$ とする．このとき、$||x|| = \sqrt{x \cdot x}$ を x のノルムと呼ぶ.

このとき、任意の $x \in \mathbb{R}^\ell$ および $a \in \mathbb{R}$ について、以下の性質が満たされる.

1. $||x|| \geq 0$
2. $||x|| = 0 \iff x = 0$
3. $||ax|| = |a| \times ||x||$
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

問題 2 上の 1-3 を証明しなさい.

補題 1 (Schwarz の不等式) 任意の $x, y \in \mathbb{R}^\ell$ について

$$|x \cdot y| \leq ||x|| \times ||y||$$

定義 7 X を集合とする．$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ が以下の条件をすべて満たすとき、ρ は距離関数と呼ばれる．

任意の $x, y, z \in X$ について、

1. $\rho(x, y) \geq 0$
2. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
4. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

定義 8 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ とする．$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\ell} (x_i - y_i)^2}$$

これをユークリッド距離関数と呼ぶ.

定義 9 X を集合とし、$x \in X$、$r \in \mathbb{R}_{++}$ をそれぞれ任意に選んで固定する．$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ を X 上に定義された距離関数とする．

このとき、

$$B_r(x) = \{x' \in X |\ \rho(x, x') < r\}$$

を x を中心とした半径 r の開球とし、また、

$$\bar{B}_r(x) = \{x' \in X |\ \rho(x, x') \leq r\}$$

を x を中心とした半径 r の閉球とする．