

数理計画法E(第6学期) 第9回

担当: 飯田勝吉(いいだかつよし)
iida@gsic.titech.ac.jp



2009/12/21

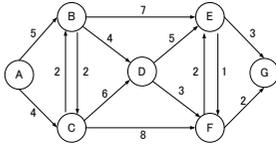
Katsuyoshi Iida (c)

1

前回までの復習1

• 最短路問題

- 節点Aから節点G間で最短で行くための経路を求めよ。ただし、枝に与えられた値はその枝の長さを表す。



2009/12/21

Katsuyoshi Iida (c)

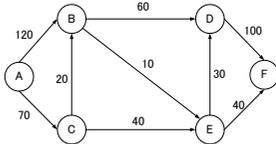
2



前回までの復習2

• 最大流問題

- 節点Aから節点Fまで最大どれだけの流量を流すことができるか。ただし、枝に与えられた値はその枝の容量を示す。



2009/12/21

Katsuyoshi Iida (c)

3

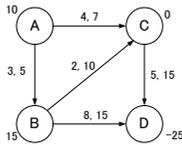




前回までの復習3

・ 最小費用流問題

- 全ての節点における需要量・供給量を満足しつつコストを最小にするにはどうしたらよいか。



2009/12/21

Katsuyoshi Iida (c)

4

前回までの復習4

・ 代表的ネットワーク最適化問題とその解法

- 最短路問題・・・ダイクストラ法
- 最大流問題・・・フロー増加法(ラベリング法)、プリフロープッシュ法
- 最小費用流問題・・・パスサッカー・ゴーウエン法、クライン法

2009/12/21

Katsuyoshi Iida (c)

5

PERT (Program Evaluation and Review Technique) ・ 1

・ 米海軍が開発したプロジェクト管理手法

- 作業の相互関係をネットワーク図で表現
- 作業開始順序の最適化等に利用

2009/12/21

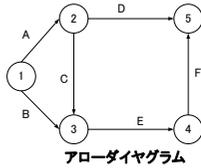
Katsuyoshi Iida (c)

6

PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 2

- ・ [問題 3.3] 作業AからFまでの6つからなる表のプロジェクトの終了までの最短日数を求めよ。

作業名	制約	所要日数
A	なし	2
B	なし	6
C	A	3
D	A	8
E	B, C	3
F	E	4



アローダイヤグラム

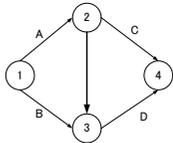
2009/12/21

Katsuyoshi Iida (c) 作業A = 枝(1,2) 7

PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 3

- ・ アローダイヤグラムがかけない場合
- _____を追加

作業名	制約
A	なし
B	なし
C	A
D	A, B



Katsuyoshi Iida (c)

8

PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 4

- ・ アローダイヤグラムのモデル化
 - 節点の集合の定義 $V = \{1, 2, \dots, m\}$
 - 枝集合 E に対して、 $(i, j) \in E$ ならば $i < j$ と定義
- よって必ず下記が成立
 - ・ 始点 = _____
 - ・ 終点 = _____

2009/12/21

Katsuyoshi Iida (c)

9

PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 5

- プロジェクト所要時間の導出
 - アローダイアグラム上において
 - 始点から終点までの全パスにおける _____
 - 前提: ダミー枝の長さ=0
 - 枝(i,j)の長さ= $t_{i,j}$

プロジェクト所要時間の求め方
枝の集合をE、節点の集合をV={1,...,m}としたとき、
j=2,...,m について以下を順に求める。

$$v_j^e = \max_{(i,j) \in E} (v_i^e + t_{i,j})$$

ただし、 $v_1^e = 0$ 。

2009/12/21

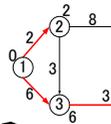
Katsuyoshi Iida (c)

10

PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 6

- v_i^e
 - 枝(i,j)に対応する作業 $A_{i,j}$ が開始できる最も早い時刻= (_____)
- 問題3.3を解く

- (0) $v_1^e = 0$.
- (1) $v_2^e = v_1^e + t_{1,2} = 2$.
- (2) $v_3^e = \max(v_1^e + t_{1,3}, v_2^e + t_{2,3}) = 6$.
- (3) $v_4^e =$ _____
- (4) $v_5^e =$ _____



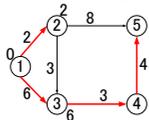
2009/12/21

Katsuyoshi Iida (c)

11

PERT (Program Evaluation and Review Technique) - 7

- 図では、 v_j^e を求める際に最大値を取った枝を赤く描いている。
- 始点から終点の最長経路= (1,3),(3,4),(4,5)= _____



2009/12/21

Katsuyoshi Iida (c)

12

課題1

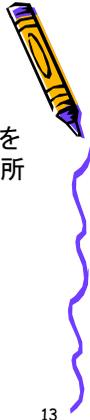
- 表のプロジェクトのアローダイヤグラムを作成し、最早開始時刻とプロジェクトの所要日数を求めよ。

作業名	制約	所要日数
A	なし	4
B	なし	6
C	A	4
D	A, B	3
E	A	5
F	C, D	2

2009/12/21

Katsuyoshi Iida (c)

13



PERT (Program Evaluation and Review Technique) ・8

- PERT手法
 - アローダイヤグラムにより複数の作業から構成されるプロジェクトの所要日数の導出
 - その次に、各作業の延長できる最大時間 () の導出も可能

2009/12/21

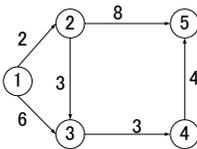
Katsuyoshi Iida (c)

14



PERT (Program Evaluation and Review Technique) ・9

- [問題3.4] 下図のプロジェクトの各作業の余裕時間を求めよ。



2009/12/21

Katsuyoshi Iida (c)

15



PERT (Program Evaluation and Review Technique) ・ 10

・ 余裕時間

- プロジェクトの所要時間を変えずに、いずれかの作業を延長可能な最大時間
- 余裕時間 = () - 最早開始時刻
- クリティカルパスの余裕時間 = 0 - その作業の作業時間

() の求め方

枝の集合をE、節点の集合をV={1,...,m}としたとき、
j=m-1,m-2,...,1 について以下を順に求める。

$$v_i^l = \min_{(i,j) \in E} (v_j^l - t_{i,j})$$

ただし、 $v_m^l = v_m^e$.

2009/12/21

作業(i,j)の余裕時間 = _____

16

PERT (Program Evaluation and Review Technique) ・ 11

・ 問題3.4の解

- ① 最早開始時刻を導出 $\begin{cases} v_1^e = 0, v_2^e = 2, v_3^e = 6, \\ v_4^e = 9, v_5^e = 13. \end{cases}$
- ② $v_5^l = v_5^e = 13.$
- ③ $v_4^l = v_5^l - t_{4,5} = 13 - 4 = 9.$
- ④ $v_3^l = v_4^l - t_{3,4} = 9 - 3 = 6.$
- ⑤ $v_2^l = \min(\text{_____}) = \text{_____}$
- ⑥ $v_1^l = \min(\text{_____}) = \text{_____}$

2009/12/21

Katsuyoshi Iida (c)

17

PERT (Program Evaluation and Review Technique) ・ 12

- ⑦ 作業(1,3), (3,4), (4,5)はクリティカルパス上にあるので、余裕時間は0。それ以外の作業(1,2), (2,3), (2,5)の余裕時間はそれぞれ、 $3-0-2=1$, $6-2-3=1$, $13-2-8=3$ となる

・ 余裕時間

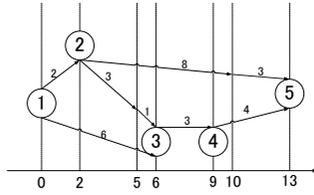
- 全余裕時間 $v_j^l - v_i^e - t_{i,j}$.
 - ・ その作業に依存する他の作業に影響する余裕時間
- 自由余裕時間 $v_j^e - v_i^e - t_{i,j}$.
 - ・ その作業に依存する他の作業と独立に取れる余裕時間

2009/12/21

Katsuyoshi Iida (c)

18

今までの例
(全余裕 = 自由余裕 or 自由余裕なし)

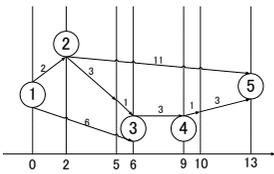


2009/12/21

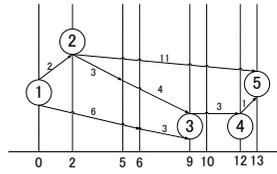
Katsuyoshi Iida (c)

19

自由余裕 ≠ 全余裕の例
(作業(1,3)(2,3)に着目)



自由余裕



全余裕



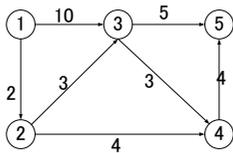
2009/12/21

Katsuyoshi Iida (c)

20

課題2

• 下図の全余裕時間と自由余裕時間を求めよ。



2009/12/21

Katsuyoshi Iida (c)

21
