



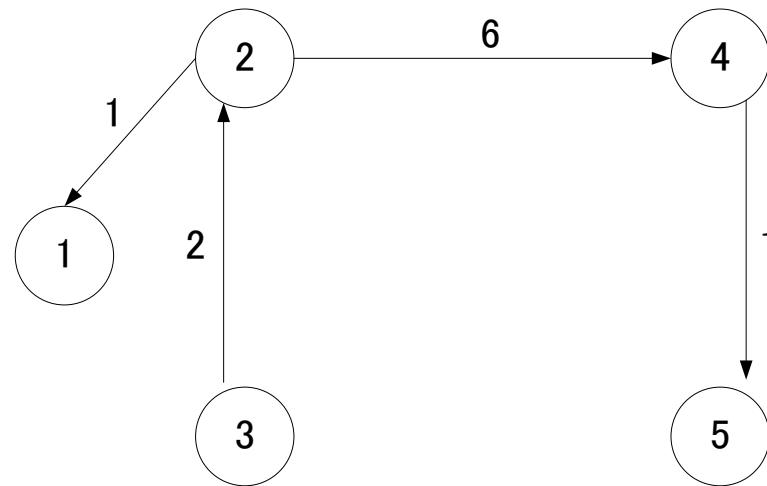
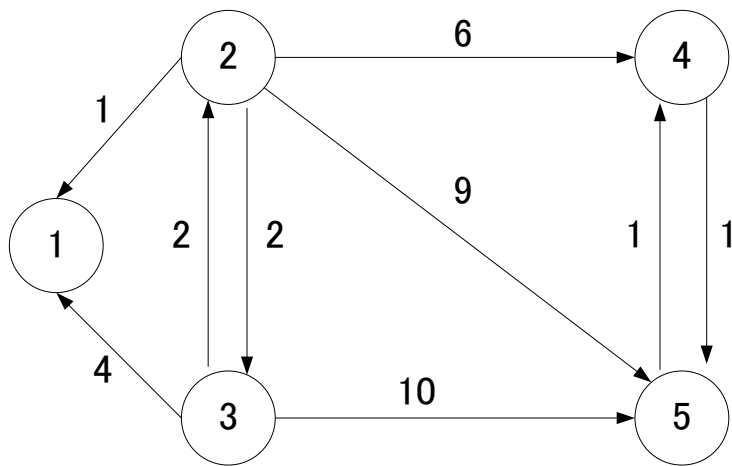
数理計画法E(第6学期) 第7回

担当: 飯田勝吉(いいだかつよし)

iida@gsic.titech.ac.jp

前回課題回答

- 下図において節点3を始点とする最短路木を求めよ。

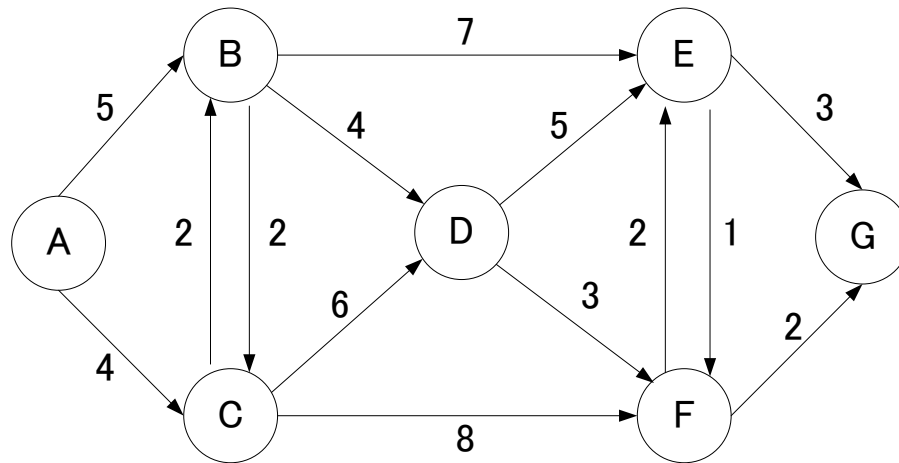


ネットワーク計画法



- 最短路問題

- 節点Aから節点G間で最短で行くための経路を求めよ。ただし、枝に与えられた値はその枝の長さを表す。

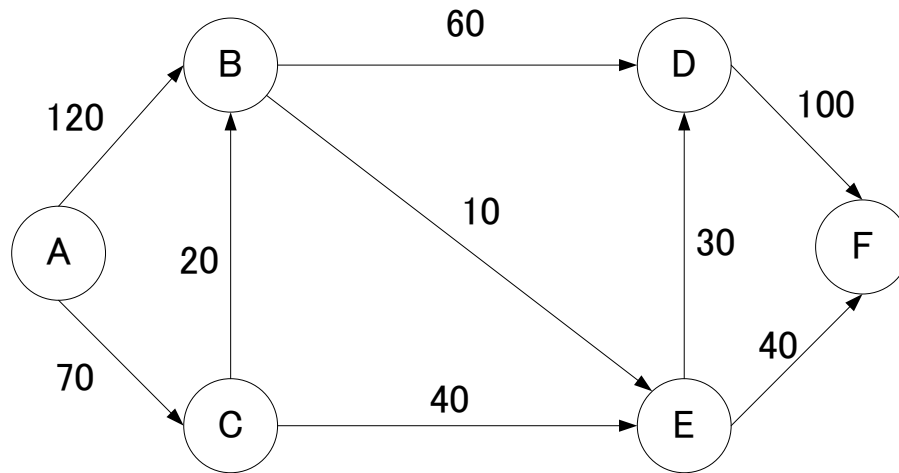


ネットワーク計画法



- 最大流問題

- 節点Aから節点Fまで最大どれだけの流量を流すことが出来るか。ただし、枝に与えられた値はその枝の容量を示す。



最大流問題(1)

- 始点をs、終点をt、枝(i,j)の容量を u_{ij} 、枝(i,j)に流す量の変数を x_{ij} とすると

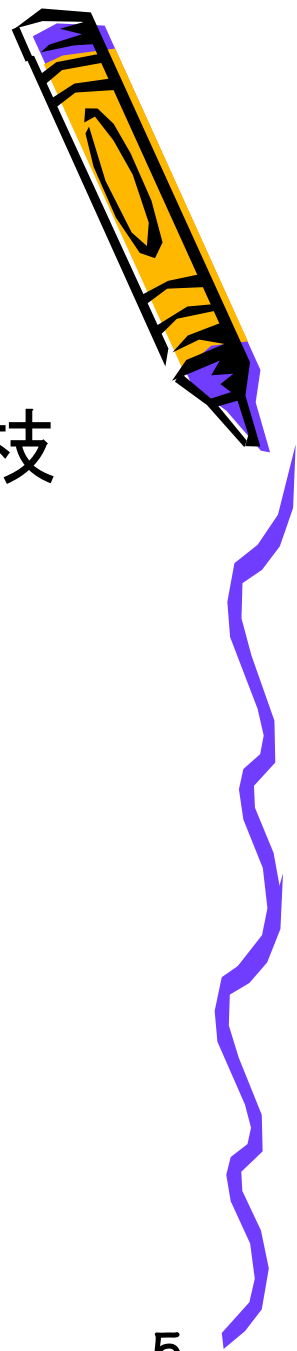
目的関数： $\text{---} \rightarrow$ 最大化

制約条件：
$$\sum_{(s,j) \in E} x_{sj} - \sum_{(j,s) \in E} x_{js} = f \quad (3.3)$$

$$\text{---} \quad (3.4)$$

$$\text{---} \quad (3.5)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad ((i, j) \in E) \quad (3.6)$$



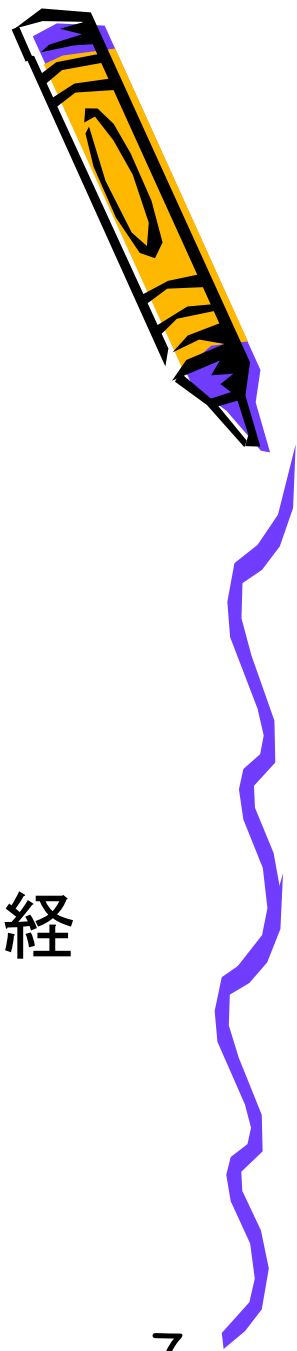
最大流問題(2)



- 式3. 4を_____という
- 式3. 6を_____という
 - この二つを満たす $x=\{x_{ij}\}$ を_____という
 - このときの f の値を_____という
- 最大流問題
 - 流量が最大となるフローを求める問題



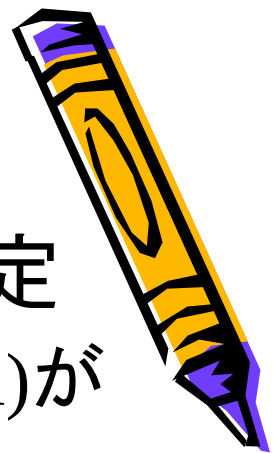
インターネットにおける フロー



- IPv4, IPv6
 - 5 tuple
 - Source IP address, Destination IP address, Source port number, Destination port number, Protocol identifier (=TCP or UDP)
- IPv6
 - Flow label
- 通常、単一の始点・終点ペアにおいて、複数経路を同時に使った通信は行わない
 - 行う場合はマルチパス通信と呼ばれる



フロー増加法(1)



- あるフロー $x = \{x_{ij}\}$ が得られていると仮定
 - (本稿では、以下簡単のため枝 (i,j) と枝 (j,i) が同時に存在することがないと仮定)
- 残余ネットワーク
 - 元のネットワーク $G=(V,E)$ の各枝 $(i,j) \in E$ を容量 $u_{ij}^x = u_{ij} - x_{ij}$ を持つ枝 (j,i) に置き換えたネットワーク。
 - ただし、 $u_{ij}^x = 0$ の場合はその枝を除外し、 u_{ij} の容量を持つ枝 _____ を設ける。
 - u_{ij}^x の値を _____ と呼ぶ。

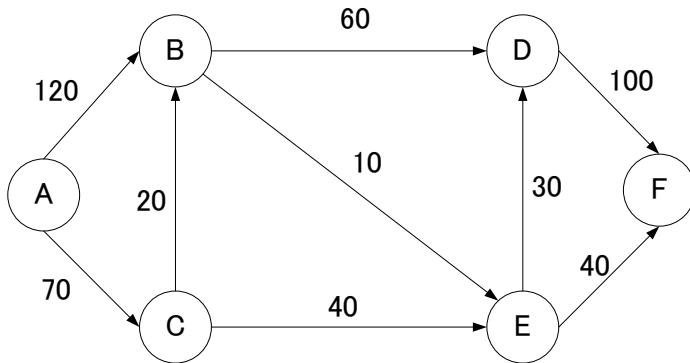


フロー増加法(2)

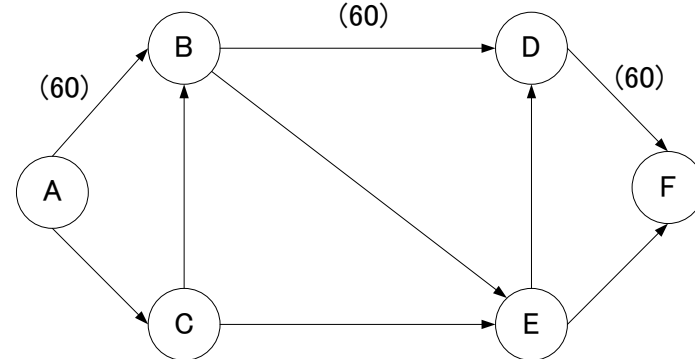


- フロー増加路

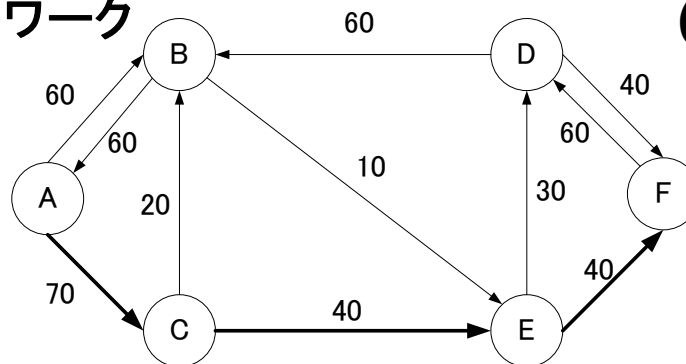
- 残余ネットワークにおける始点から終点までの経路
- 存在するとき、 $x=\{x_{ij}\}$ の増加が可能



(a)もとのネットワーク



(b)フロー



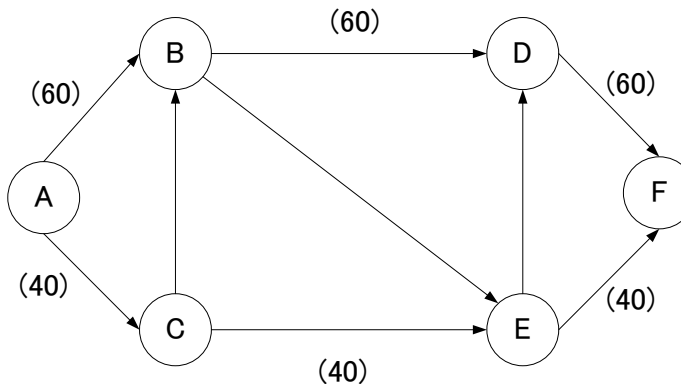
(c)残余ネットワーク



フロー増加法(3)



- ・ 前頁の例では、経路が存在するため、フロー流量の増加が可能
- ・ 増加路によって増加できる流量＝増加路に含まれる枝の残余容量の_____
- ・ この場合は_____



(d)流量の増加した新しいフロー



フロー増加法(4)



- (Step 0) 初期フローを得る。(全ての枝について $x_{ij}=0$)
- (Step 1) 残余ネットワークを作り、フロー増加路を見つける。存在しなければ終了。
- (Step2) フロー増加路に沿って、フローを追加する。追加するフロー流量はフロー増加路に含まれる枝の _____ となる。(Step 1)に戻る



フロー増加法(5)

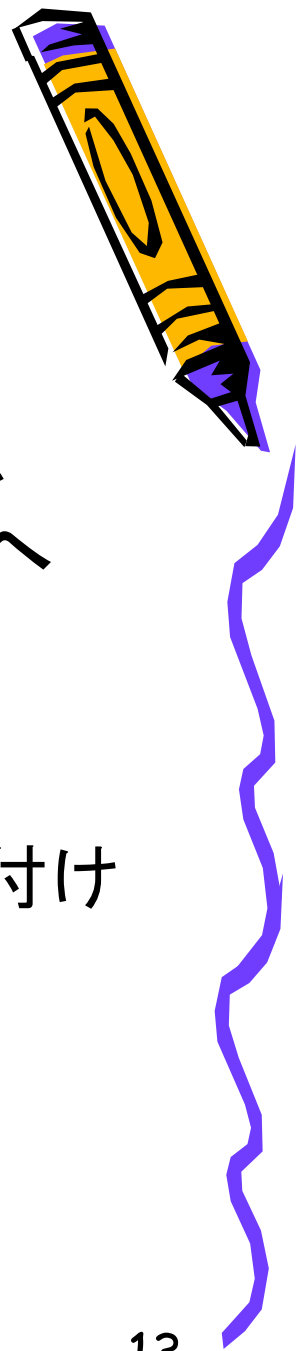


- フロー増加法
 - 残余ネットワークからのフロー増加路の探索が必要
 - 大きなネットワークでは探索は困難
- 課題
 - (1)本稿9,10ページの例に対して、図(d)のフローに対する残余ネットワークを図示せよ。
 - (2)(1)の残余ネットワークに対してさらなるフロー増加路を見つけ、さらに流量の増加したフローを図示せよ。



ラベリング法(1)

- ネットワーク $G=(V,E)$ と始点 $s \in V$ と終点 $t \in V$ が与えられたとき、始点から終点への経路を得るアルゴリズム
 - フロー増加路の探索に利用
 - ソースから到達可能な点に順次ラベルを付ける



ラベリング法(2)



- (Step 0) 初期状態として $L=\{s\}$, $S=\{\}$ とし、全ての節点 $i \in V$ に対し $p(i)=0$
- (Step 1) 節点 $\hat{i} \in L \setminus S$ を一つ選び $S \leftarrow S \cup \{\hat{i}\}$ とする。
- (Step 2) 全ての枝 $(\hat{i}, j) \in E$ について以下を行う
 $j \notin L$ ならば $L \leftarrow L \cup \{j\}$, $p(j) \leftarrow \hat{i}$
- (Step 3) $t \in L$ または $L=S$ ならば終了。そうでなければ Step 1 に戻る。



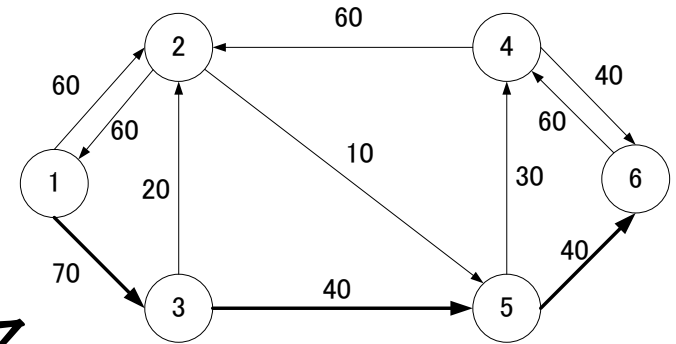
ラベリング法(3)



- 集合 L はラベル付けされた
(= _____) 節点の集合
- 集合 $S(\subseteq L)$ はその節点から一つ先の節点まで到達可能か調べ終わった(= _____) の節点の集合
- アルゴリズム終了条件
 - $t \in L$ で終了した場合は始点から終点までの経路(つまり増加路)が求まったこととなる。
 - $L=S$ で終了した場合は、経路が存在しないことを意味するので、フロー増加法も終了する。



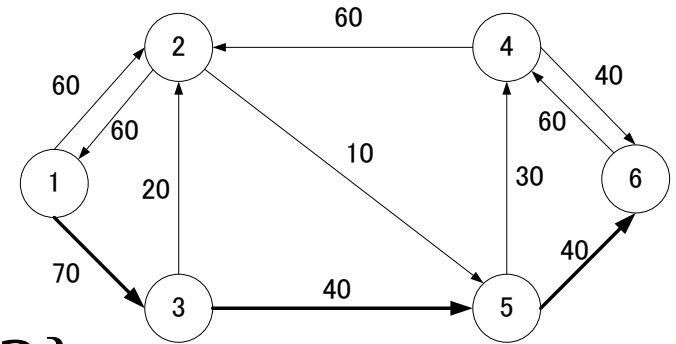
ラベリング法(4)



- 例として8頁の図(c)を考える
- (0) 初期状態は、 $L=\{1\}$, $S=\{\}$,
 $p(1)=p(2)=\dots=p(6)=0$
- (1) $L \setminus S=\{1\}$ より $\hat{i}=1$ を選択。 $S=\{1\}$ 。
 $(1,2),(1,3) \in E$ より、 $L=\{1,2,3\}$, $p(2)=p(3)=1$
- (2) $L \setminus S=\{2,3\}$ より $\hat{i}=2$ を選択。 $S=\{1,2\}$ 。
_____ $\in E$ より、 $L \leftarrow \{ \text{_____} \}$, _____



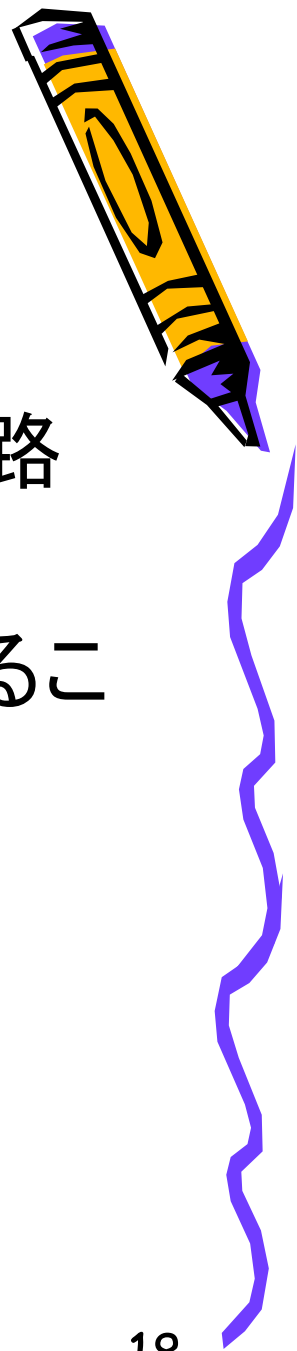
ラベリング法(5)



- (3) $\hat{i} = 3$ を選択、 $S = \{1, 2, 3\}$ 。
_____ $\in E$ だが、_____ はすでにLに含まれているので更新しない
- (4) $\hat{i} = 5$ を選択、 $S = \{ \text{_____} \}$
_____ $\in E$ より、 $L = \{ \text{_____} \}$,
_____。



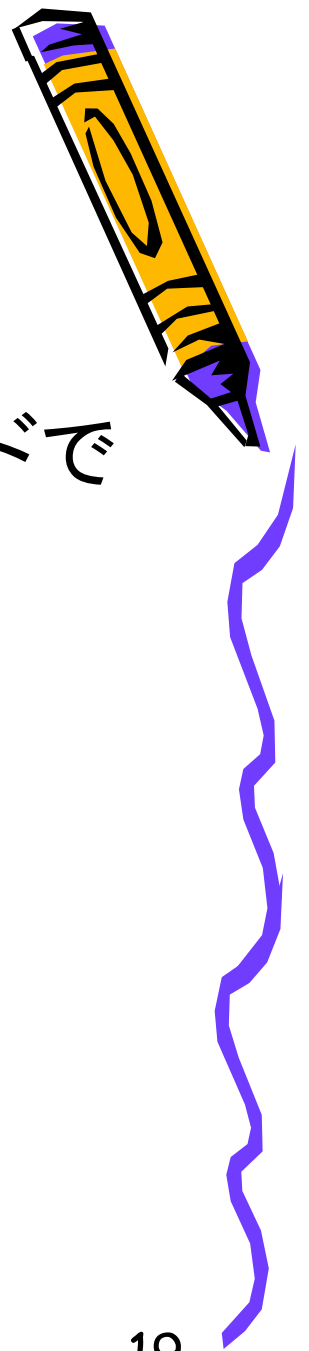
ラベリング法(6)



- ・ 終了条件より節点1から節点6への経路探索完了
- ・ $p(6)=5, p(5) = 2, p(2) = 1$ と逆にたどることにより、_____が得られる



ラベリング法(7)



- 経路を求める過程(下線=次のラウンドで選択される節点)

	1	2	3	4	5	6
(0)	<u>0</u>	0	0	0	0	0
(1)		<u>1</u>	1	0	0	0
(2)			<u>1</u>	0	2	0
(3)				0	<u>2</u>	0
(4)				5		5



課題



- (3) 11ページの(2)においてラベリング法を用いて増加路を求めよ。
- (4) (3)終了後の残余ネットワークを図示し、ラベリング法を用いて増加路を求めよ。さらに流量を増やすことは可能か。



フロー増加法の正当性と 最大流最小カット定理(1)



- ラベリング法を用いたフロー増加法によって最大流が求まることを示す。
- カット:
 - 節点集合 V を始点を含む集合 S とシンクを含む集合 T に分割したもの
 - カット (S,T) に対して、 $i \in S, j \in T, (i,j) \in E$ のとき、 $(i,j) \in (S,T)$ と書く
 - 逆に、 $i \in T, j \in S, (i,j) \in E$ のとき $(i,j) \in (T,S)$ と書く



フロー増加法の正当性と 最大流最小カット定理(2)



- カットの容量

- 全ての枝 $(i,j) \in (S,T)$ の容量 u_{ij} の和をカットの容量と呼び $C(S,T)$ と書く。つまり

$$C(S,T) = \sum_{(i,j) \in (S,T)} u_{ij}.$$



フロー増加法の正当性と 最大流最小カット定理(3)



- x を任意のフロー、 f をその流量、 (S,T) を任意のカットとすると

$$C(S,T) = \sum_{(i,j) \in (S,T)} u_{ij} \geq \sum_{(i,j) \in (S,T)} x_{ij}$$

$$f = \sum_{(i,j) \in (S,T)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in (T,S)} x_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in (S,T)} x_{ij}$$

の2式が成立。したがって



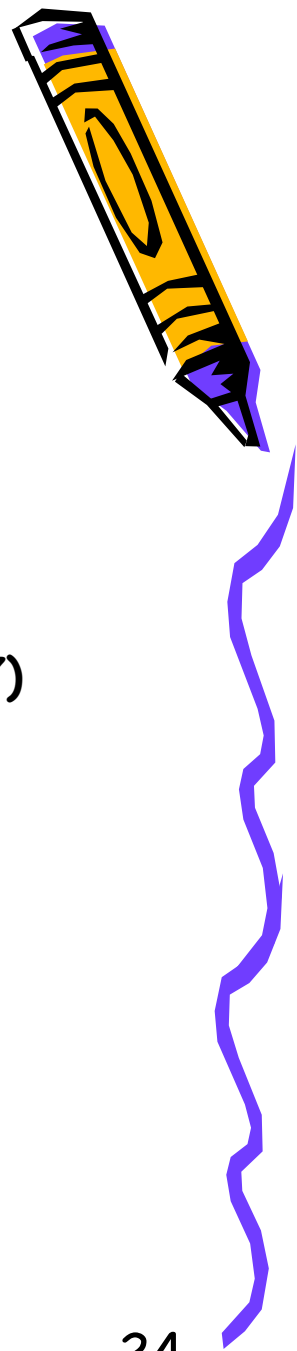
フロー増加法の正当性と 最大流最小カット定理(4)

$$f \leq C(S, T)$$

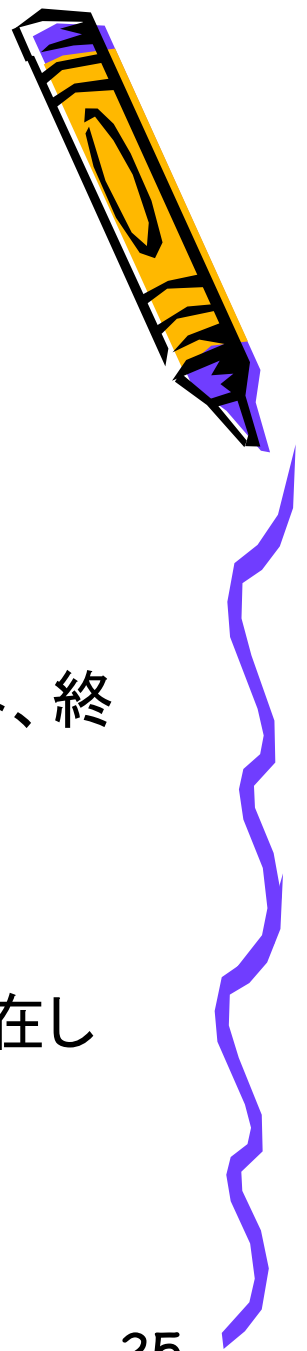
すなわち

$$\max_x f \leq \min_{(S, T)} C(S, T) \quad (3.7)$$

が成立。



フロー増加法の正当性と 最大流最小カット定理(5)



- 以下のフロー増加法の過程を想定
 - Step1の探索(=ラベリング法)が終了
- ラベリング法の終了条件より
 - 残余ネットワーク $G^x=(V, E^x)$ に対して始点 s を含み、終点 t を含まない節点集合 S^* を獲得
 - $T^*=V \setminus S^*$ と定義すると、 (S^*, T^*) =カット
 - E^x には S^* 内の節点から T^* 内の接点への枝が存在しない



フロー増加法の正当性と 最大流最小カット定理(6)



- したがって

- $(i,j) \in (S^*, T^*)$ ならば $x_{ij}^* = u_{ij}$ である。

- $x_{ij}^* < u_{ij}$ を仮定すると、残余ネットワークには $u_{ij}^x = \frac{u_{ij} - x_{ij}^*}{1}$ の容量を持つ S^* から T^* への枝 (i,j) が存在することになり矛盾。

- $(i,j) \in (T^*, S^*)$ ならば $x_{ij}^* = 0$ である。

- $x_{ij}^* > 0$ を仮定すると、残余ネットワークには $u_{ji}^x = \frac{u_{ji} - x_{ji}^*}{1}$ の容量を持つ S^* から T^* への枝 (j,i) が存在することになり矛盾。



フロー増加法の正当性と 最大流最小カット定理(7)



- よってフロー x^* の流量 f^* は

$$f^* = \sum_{(i,j) \in (S^*, T^*)} x_{ij}^* - \sum_{(i,j) \in (T^*, S^*)} x_{ij}^* = \sum_{(i,j) \in (T^*, S^*)} u_{ij} = C(S^*, T^*)$$

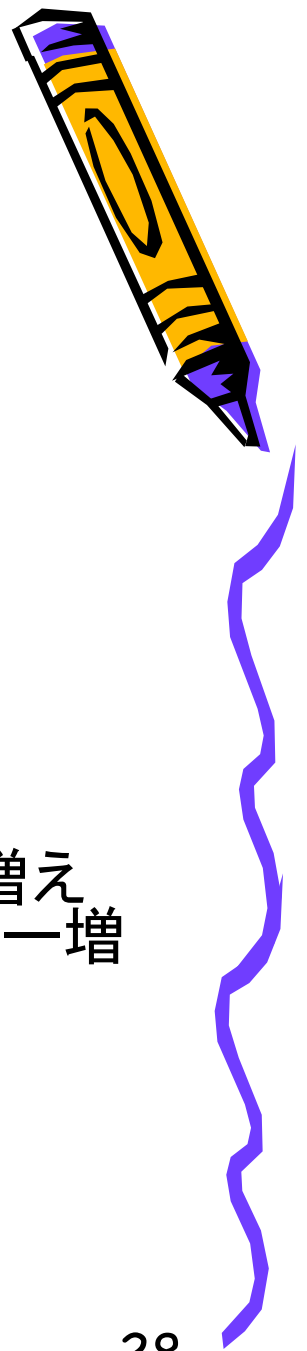
を満たしている。23頁式(3.7)より f^* が最大流量であることがわかり、 x^* が最大流となっている。

[定理 3.1] (最大流最小カット定理)

任意のネットワークにおいてフローの最大流量と
カット容量の最小値は等しくなる。



フロー増加法の計算量と改良(1)



- フロー増加法の計算量
 - n :節点数、 m :枝数、 U :枝容量の最大値
 - 枝容量が全て整数と仮定
 - 1回のラベリング法の計算量は枝の本数に比例:
 $O(m)$
 - フロー増加法の各ラウンドで少なくとも流量は1増える。また、最大流量は高々 mU 。したがって、フロー増加法の繰り返し回数は高々 mU
 - よって、全体では $O(m^2U)$ となる。





フロー増加法の計算量と改良(2)

- フロー増加法の計算量の特徴
 - U に依存
 - U が大きいとき非効率
- 改良方法1
 - 複数のフロー増加路が存在する場合、必ず最も短い(枝数の少ない)経路を選ぶことにすると、フロー増加法の繰り返し回数が $mn/2$ 以下になることが知られている。
 - このとき $O(m^2n)$ となる。 $m < n$ のとき、有利。

