数理計画法E(第6学期)
第5回

担当:飯田勝吉(いいだかつよし)
iida@gsic.titech.ac.jp

課題の回答

- 1．補助問題を解くと下記となる

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-w$	0	2	1	0	2	-4
x_4	0	-2	-1	1	-1	4
x_1	1	3/2	1	0	1/2	3

wの最小値は4で0にならない⇒与えられた問題は実行可能解を持たない

主問題と双対問題(1)

- 標準形の問題に関して__________を考えることが可能

元の問題

=__________

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数：} && \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \to \text{最小} \\
&\text{制約条件：} && \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\
& && \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

____

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数：} && \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \to \text{最大} \\
&\text{制約条件：} && \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c},
\end{aligned}
$$

主問題と双対問題(2)

- 標準形ではない場合

元の問題

＝＿＿＿＿＿＿＿

目的関数： $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \to$ 最小

制約条件： $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b},$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

＿＿＿＿＿＿＿

目的関数： $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \to$ 最大

制約条件： $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c},$

$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

主問題と双対問題(3)

- 双対問題の作り方の例

目的関数: $z = x_1 + x_2 + x_3 \to$ 最小化

制約条件: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$

$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 12$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$

別の変数$y1, y2$と
目的関数
の値wを導入

$$w = 5y_1 + 12y_2$$

主問題と双対問題（4）

- もし、$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$が元の問題の解ならば

$$
\begin{aligned}
(x_1+2x_2+3x_3)y_1 &= 5y_1 \\
(2x_1+5x_2+4x_3)y_2 &= 12y_2
\end{aligned}
$$

なので

$$
w=(y_1+2y_2)x_1+(2y_1+5y_2)x_2+(3y_1+4y_2)x_3
$$

となる。 従って $y=(y_1,y_2)$が

$$
\begin{aligned}
y_1+2y_2 &\le 1 \\
2y_1+5y_2 &\le 1 \\
3y_1+4y_2 &\le 1
\end{aligned}
$$

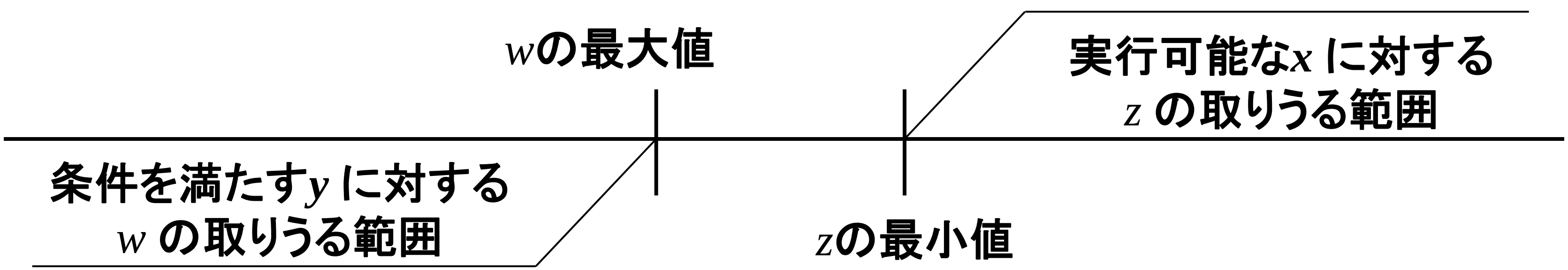
を満たすと

主問題と双対問題（5）

- 全ての実行可能解 x に対して

$$w=(y_1+2y_2)x_1+(2y_1+5y_2)x_2+(3y_1+4y_2)x_3 \le x_1+x_2+x_3=z$$

がなりたつ。



主問題と双対問題(6)

- 例題問題の双対問題

主問題

目的関数: $z = x_1 + x_2 + x_3 \to$ 最小化

制約条件: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$

$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 12$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$

双対問題

目的関数: $w = 5y_1 + 10y_2 \to$ 最大化

制約条件: $y_1 + 2y_2 \leq 1$

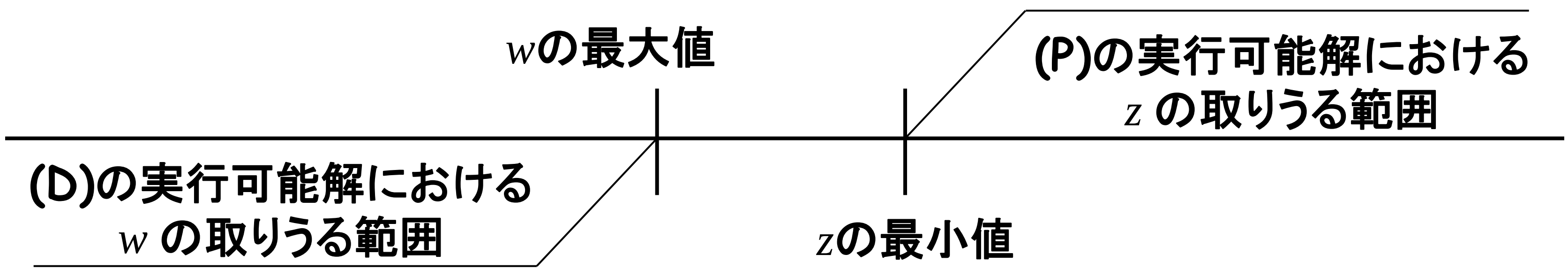
$2y_1 + 5y_2 \leq 1$

$3y_1 + 4y_2 \leq 1$

前頁の説明より「主問題の最小値≧双対問題の最大値」が成立

主問題と双対問題（7）

- 主問題を(P)と書き、双対問題を(D)と書く



一般に上記が成立

主問題と双対問題(９)

- 定理２．１
  - 双対問題のそのまた双対問題は主問題に等しい
- 証明

右の標準形の問題を主問題とすると

目的関数：　$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \to$ 最小

制約条件：　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

双対問題は

目的関数：　$w = \underline{\hspace{5cm}} \to$ 最大

制約条件：　$\underline{\hspace{10cm}}$

となる

主問題と双対問題（10）

制約条件に非負条件がないので各変数を分離

$$y = y_1 - y_2,\quad y_1 \geq 0,\quad y_2 \geq 0$$

すると

目的関数：　$w =$ ______________ $\rightarrow$ 最大
制約条件：　____________________________

スラック変数
y3を導入して

目的関数：　$w =$ ______________ $\rightarrow$ 最大
制約条件：　____________________________

主問題と双対問題(11)

目的関数を最小化にすると

目的関数:________________________→最小

次に、変数ベクトルを $\boldsymbol{y}' = (\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \boldsymbol{y}^3)^{\mathrm{T}}$ とすると

$$\begin{aligned} &\text{費用ベクトル}:\boldsymbol{c}' = (-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \,|\, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \,|\, 0^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \\ &\text{係数行列}:\boldsymbol{A}' = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \,|\, -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \,|\, \boldsymbol{E}), \\ &\text{右辺ベクトル}:\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{1}$$

となる。

主問題と双対問題(12)

- ここで、元の問題の双対の双対問題は

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数：}\quad w' = (\boldsymbol{b}')^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}' \to \text{最大化}\\
&\text{制約条件：}\quad (\boldsymbol{A}')^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}' \leq \boldsymbol{c}',
\end{aligned}
$$

であるから、(1)を代入すると

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数：}\quad w' = (\boldsymbol{b}')^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}' \to \text{最大化}\\
&\text{制約条件：}\quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \boldsymbol{y}' \leq \begin{pmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

主問題と双対問題（13）

となる。制約条件の式は

$$Ay' \le -b, \quad -Ay' \le b, \quad Ey'(=y') \le 0,$$

すなわち

$$A(-y') \ge b, \quad A(-y') \le b, \quad -y' \ge 0$$

となり、結局

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{目的関数：} & -w' = c^{\mathrm{T}}(-y') \to \text{最小化} \\ \text{制約条件：} & A(-y') = b, \\ & -y' \ge 0 \end{array}}$$

となる。これは、x=-y’, z=-w’ とすれば主問題そのものである。

Q.E.D.

双対定理(1)

- P.9の図より下記がわかる
  - 定理2．2(弱双対定理)
    - xを(P)の任意の実行可能解とし、yを(D)の任意の実行可能解とすると

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

が成り立つ。

  - 定理2．3
    - (P)が非有界ならば、(D)は実行可能解を持たない(逆も同様)
  - 定理2．4
    - (P)の任意の実行可能解x^*と(D)の任意の実行可能解y^*が

$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}.$$

を満たしているならば、これらはそれぞれ(P)と(D)の最適解である

双対定理(2)

- 定理2．５(双対定理)
  - (P)が最適解を持つならば(D)も最適解を持ち、(P)におけるzの最小値と(D)におけるwの最大値は等しい。
- 証明
  - $\bar{\boldsymbol{x}}$を(P)の最適基底解、$\bar{z}$をzの最小値とし、$\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{c}$を基底部分$B$と非基底部分$N$に分けて、

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{\boldsymbol{x}}_B \mid \bar{\boldsymbol{x}}_N), \quad \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{N}), \quad \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_B \mid \boldsymbol{c}_N)$$

とすると、第2回の授業より

$$\bar{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad (2.2)$$

$$z = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad (2.3)$$

$$\boldsymbol{0} \le \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} \qquad (2.4)$$

が満たされている。

双対定理(3)

ここで、まず(D)が実行可能解を持つことを示す

$\bar{\boldsymbol{y}}$を　$\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{-1}$　と定義する。よって

$$\bar{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{c}_B.$$

また16頁・式(2.4)より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} &\le \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \bar{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}, \\ \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{y}} &\le \boldsymbol{c}_N. \end{aligned}$$

従って

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \\ \hline \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \bar{\boldsymbol{y}} \le \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_B \\ \boldsymbol{c}_N \end{pmatrix} = \boldsymbol{c}$$

より、$\bar{\boldsymbol{y}}$ は(D)の制約条件を満たしており、(P)は実行可能解 $\bar{\boldsymbol{y}}$ を持つことがわかる。

双対定理(4)

- 次に16頁・式(2.3)より

$$\bar{z} = \bar{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}}$$

- であり、これは解ベクトル $\bar{y}$ における目的関数の値になっている。従って定理2.4より

  $\bar{y}$ は(D)の最適解であり、(D)の目的関数の最大値は(P)の目的関数の最小値zと等しい。

Q.E.D.

双対定理(5)

- 双対定理のまとめ

主問題(P)

$$\text{実行可能}\begin{cases}\text{最適解あり}\\ \text{非有界}\end{cases}$$

実行可能解が存在しない

双対問題(D)

$$\left.\begin{array}{l}\text{最適解あり}\\ \text{非有界}\end{array}\right\}\text{実行可能}$$

実行可能解が存在しない

双対問題の意味と双対定理の応用(1)

- (P)として問題2.1(第2回4頁)にあるような輸送問題を考える。
  - 工場Aiにおける生産量をai
  - 取引先Bjの注文両をbj
  - AiとBj間の輸送コストをcij

とすると、この問題は以下の標準形で書ける

$$\text{目的関数：}\quad \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \to \text{最小化}$$

$$\text{制約条件：}\quad \begin{aligned} &x_{11}+x_{21}=b_1, && x_{11}+x_{12}+x_{13}=a_1,\\ &x_{12}+x_{22}=b_2, && x_{21}+x_{22}+x_{23}=a_2,\\ &x_{13}+x_{23}=b_3, && x_{11},x_{12},\ldots x_{23}\ge 0 \end{aligned}$$

双対問題の意味と双対定理の応用(2)

主問題(P)

目的関数： $\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \to$ 最小化

制約条件： $x_{11}+x_{21}=b_1,\quad x_{11}+x_{12}+x_{13}=a_1,$

$x_{12}+x_{22}=b_2,\quad x_{21}+x_{22}+x_{23}=a_2,$

$x_{13}+x_{23}=b_3,\quad x_{11},x_{12},\ldots x_{23}\geq 0$

双対問題(D)

目的関数： $a_1y_1+a_2y_2+b_1y_1'+b_2y_2'+b_3y_3' \to$ 最大化

制約条件： $y_1+y_1'\leq c_{11},\quad y_2+y_1'\leq c_{21},$

$y_1+y_2'\leq c_{12},\quad y_2+y_2'\leq c_{22},$

$y_1+y_3'\leq c_{13},\quad y_2+y_3'\leq c_{23}$

双対問題の意味と双対定理の応用(3)

- 二つの会社
  - 製品の製作会社(P社)
    - 前提1:各取引先からの受注量が固定
    - 前提2:各工場の生産量が固定
    - コスト z を最小化する輸送計画をたてたい
  - P社から受注する運送会社(D社)
    - 前提:各工場から各取引先への単位輸送費に上限が存在
    - 総利益wを最大化する工場および取引先それぞれの単位輸送費を決定したい

双対問題の意味と双対定理の応用（4）

- D社が最大化したい利益

$w =$ ______________________________

- P社からの条件

P社の各工場からの製品一つの運搬費 y_i（円）

取引先Bjに対する製品一つの運搬費 y'_j（円）

$$y_i + y'_j \leq c_{ij}$$

  - P社と輸送契約した場合の製品1単位あたりの利益 $(y_i + y_j')$円
  - P社自身によるAiからBjまでの製品1単位あたり輸送コストc_{ij}円

双対問題の意味と双対定理の応用(5)

- 感度分析
  - 制約条件の定数ベクトル$\boldsymbol{b}$のなかで性能に影響を与える係数を探索すること
  - 前提:係数行列以外のパラメータ(i.e., $\boldsymbol{c}$と$\boldsymbol{A}$)は固定
- 応用例
  - 工場増産計画の策定など

双対問題の意味と双対定理の応用(6)

- 例に戻る
  - P社が (P)の最適解に基づいて最適な輸送を行っていると仮定
  - すなわち、現在の総輸送コストは $\bar{z}=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
  - (D)の最適解を $\bar{\boldsymbol{y}}=(\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$ とすると $\bar{z}=(\bar{\boldsymbol{y}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$
  - また、主問題の最適条件より

$$\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\geq\boldsymbol{0}$$

双対問題の意味と双対定理の応用（7）

- ここで、取引先からの注文量の増加に伴い、工場$\boldsymbol{A}_1$または$\boldsymbol{A}_2$のどちらかの生産量をΔ増やすことを想定
  - $\boldsymbol{b}$が$\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}$
    - ここでは、$\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{e}_1$または、$\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{e}_2$
  - 他のパラメータは変わらない
    - 従って、最適条件における基底形式はかわらない
  - 工場A1に投資したとき
    - $\bar{z}' = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{e}_1) = \bar{z} + \Delta\bar{y}_1$
  - 工場A2に投資したとき
    - $\bar{z}' = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{e}_2) = \bar{z} + \Delta\bar{y}_2$

**双対問題の最適解により
システムの変動が目的
関数にどのような
影響を与えるのかの
解析が可能**

||

感度分析

課題

- 問題2.1（第２回４頁）において、３つの取引先がそれぞれ注文料をΔ増やしたいと要求してきと想定する。どれか一つだけの取引先をΔ増やした場合、どの取引先の注文料増加に応じるべきか答えよ。