数理計画法E（第6学期）第2回

担当：飯田勝吉（いいだかつよし）
iida@gsic.titech.ac.jp

線形計画問題

- 数理計画問題
  - 与えられた制約条件のもとで、目的関数を最小または最大とするような決定変数の値をみつけること
- 線形計画問題
  - 変数の1次の等式または不等式で与えられた制約条件のもとで、変数の1次関数で与えられた目的関数を最大化（あるいは最小化）する問題

線形計画問題の講義の過程

- 第2回:
  - 標準形と基底形式
- 第3回
  - シンプレックス法
- 第4回
  - 2段階シンプレックス法
- 第5回
  - 双対定理

標準形(1)

- [問題 2.1] 2つの工場 A1, A2で同じ製品を生産し、3つの取引先B1,B2,B3へ納入している会社がある。各取引先からの注文量、各工場における生産量、および各工場から各製品までの輸送コストは表のとおりである。層輸送コストを最小とする輸送計画とは?

(a) 注文量

B1	70
B2	40
B3	60

(b) 生産量

A1	90
A2	80

(c) 輸送コスト

	B1	B2	B3
A1	4	7	12
A2	11	6	3

標準形(2)

- 工場Aiから取引先Bjへ輸送する量を　x_{ij}（単位）とすると、この問題は

目的関数：$\underline{\hspace{10cm}}$ →最小化

制約条件：$x_{11}+x_{21}=70$　　$x_{11}+x_{12}+x_{13}=90$

$\underline{\hspace{5cm}}$　　$\underline{\hspace{6cm}}$

$\underline{\hspace{5cm}}$　　$x_{ij}\geq 0 \quad (i=1,2;\ j=1,2,3)$

標準形(3)

目的関数:　$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$　→最小化

制約条件:　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

のように表した問題を**標準形**という。

- ポイント1:目的関数の最小化
- ポイント2:制約条件第1式が等式
- ポイント3:制約条件第2式が0ベクトル以上となる不等式

標準形(4)

- 前回の問題を再掲

目的関数: $70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \quad \rightarrow$最大化

制約条件:
$$
\begin{array}{rrrcr}
5x_1 & & +6x_3 & \leq & 80 \\
 & 2x_2 & +8x_3 & \leq & 50 \\
7x_1 & & +15x_3 & \leq & 100 \\
3x_1 & +11x_2 & & \leq & 70
\end{array}
\qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
$$

標準形とは異なるのは

・目的関数の____________でなく____________。

・制約条件が____________でなく____________。

標準形（５）

- 全ての線形計画問題→標準形に変換可

- 変換ステップ１：目的関数を＿＿＿＿＿＿＿＿＿する
- 変換ステップ２：新しい変数を導入する
- 変換ステップ３：非負条件を導くため、変数変換を行う。

標準形(6)

- 変換ステップ1
  - 目的関数の変換
    - 変換前

$$70x_1 + 120x_2 + 30x_3$$

    - 変換後

$$-70x_1 - 120x_2 - 30x_3$$

標準形(7)

- 変換ステップ2
  - 新しい変数を導入し、不等式を等式に変換
  - 例:制約条件1
    - 変換前 $5x_1 + 6x_3 \leq 80$
    - 新変数の導入 $x_4 = 80 - 5x_1 - 6x_3$
    - 変換後 $5x_1 + 6x_3 + x_4 = 80, \quad x_4 \geq 0$
  - 導入した変数の名称:**スラック変数**

標準形(8)

- 標準形で書くと

目的関数: $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ →最小化

制約条件: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -70 \\ -120 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 15 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 80 \\ 50 \\ 100 \\ 70 \end{pmatrix}$$

標準形(９)

- 変換ステップ3:以下の問題を考える

目的関数: $-x_1 + 5x_2 \rightarrow$ 最小化

制約条件: $4x_1 - 6x_2 = 30$

$$2x_1 + 8x_2 - x_3 = 50$$

$$7x_1 + 5x_2 + x_4 = 10$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$

標準形と異なるところは

標準形（10）

- 非負条件のない変数一つにつき、非負条件のある二つの変数を導入し置き換える
- 例：$x_2 = x_2' - x_2''$ とおくと

$$-x_1 + 5x_2' - 5x_2'' \to \text{最小化}$$

$$4x_1 - 6x_2' + 6x_2'' = 30$$

$$2x_1 + 8x_2' - 8x_2'' - x_3 = 50$$

$$7x_1 + 5x_2' - 5x_2'' + x_4 = 10$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2' \ge 0, \quad x_2'' \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0$$

標準形（１１）

- ３つのステップにより、全ての線形計画問題を標準形に書き直すことができる。

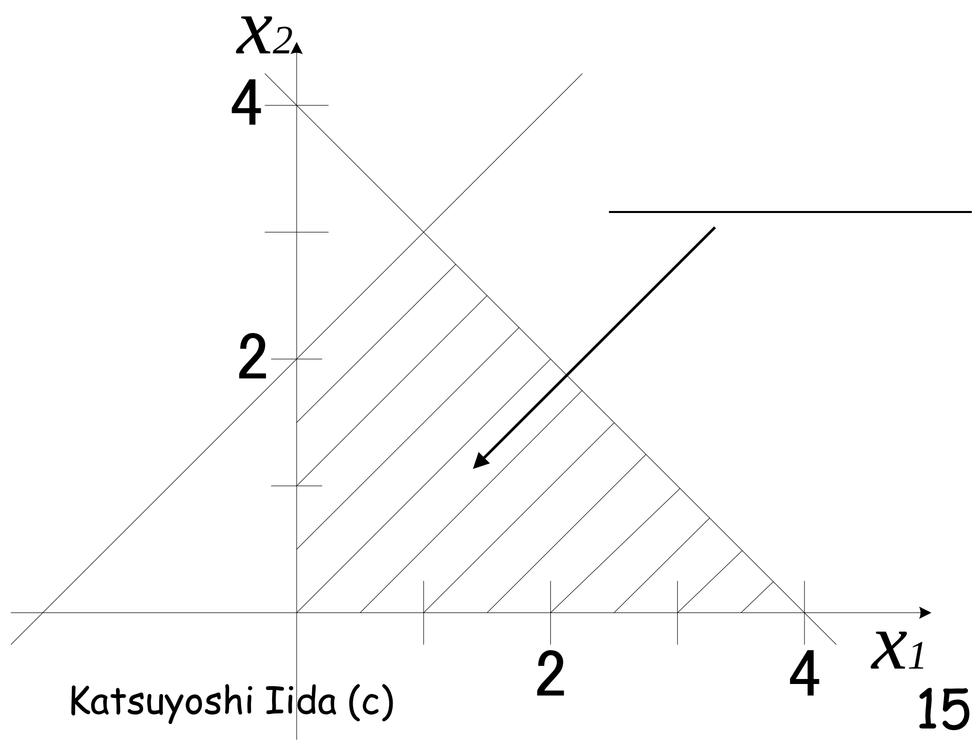
- Ｑ：なぜ、全ての線形計画問題を標準形に書き直すのか。
- Ａ：解法の開発効率向上のため、および複数の線形計画問題間での比較を行いやすくするため。

幾何学的手法による解法（決定変数＝2）（1）

- 次の問題を考える（標準形にはしていない）

目的関数：$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \rightarrow$ 最大化

制約条件：
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$



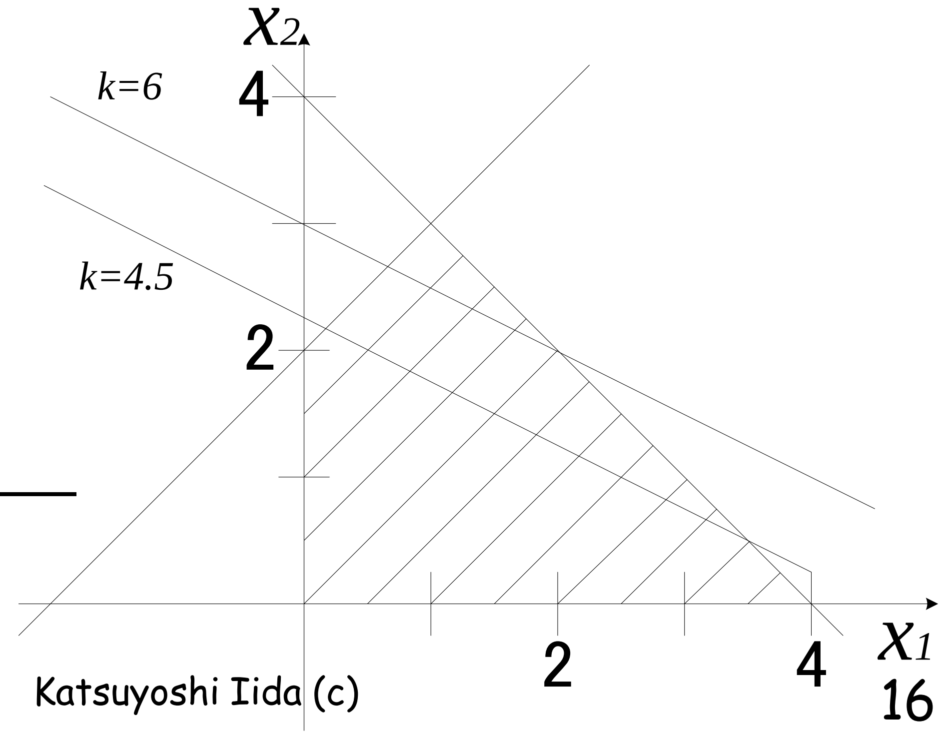
幾何学的手法による解法（決定変数＝2）（2）

問題を解くためには*k*を
______させ平行移動する

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 = k$$
$$x_2 = -x_1/2 + k/2$$

x_2切片が____より大きくなると実行可能領域との共通点がなくなる。その時の実行可能解は

$(x_1, x_2) =$ __________



幾何学的手法による解法(3)（決定変数＝2）

- 目的関数の最大(または最小)値を与える実行可能解を**最適解**という。

- ポイント
  - 最適解は、実行可能領域の一つの端点となる

幾何学的手法による解法(4)(決定変数＝2)

- 次に標準形に置き換える
  - スラック変数x_3, x_4の導入

目的関数: $f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 \to$ 最小化

制約条件:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$

  - 実行可能領域の境界の4本の直線は、x_1, x_2, x_3, x_4 に対応

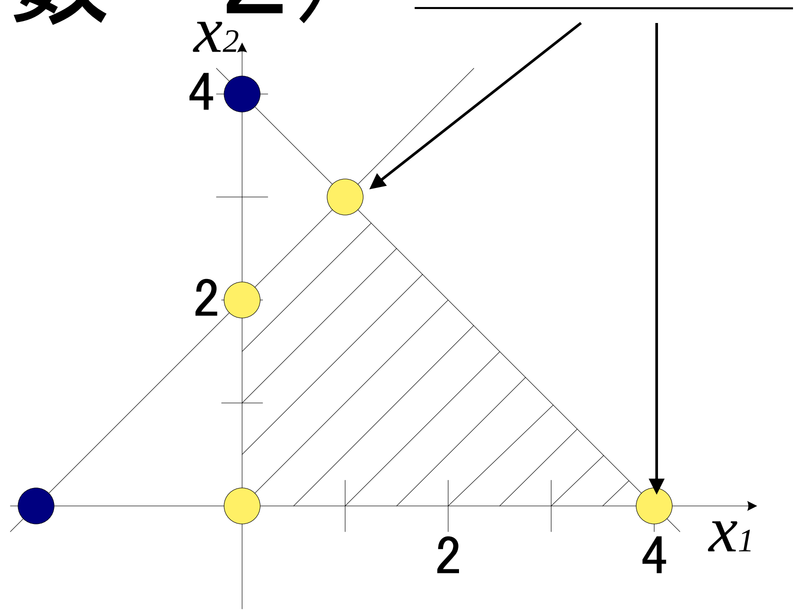
幾何学的手法による解法（5）（決定変数＝2）

- 従って
  - [最適解の候補]=[2直線の交点]=[4変数のうち2変数が0]

となる。4変数のうち2変数が0となるベクトル$\boldsymbol{x}$＝(x_1, x_2, x_3, x_4)は____個ある。このような解（ベクトル）を__________という。

幾何学的手法による解法(6)（決定変数＝2）

- (0, 0, 4, 2)　→ 0
- (0, 4, 0, －2) → ×
- (0, 2, 2, 0)　→ －4
- (4, 0, 0, 6)　→ －4
- (－2, 0, 6, 0)　→ ＿＿＿
- (1 , 3, 0, 0)　→ ＿＿＿



幾何学的手法による解法（７）（決定変数＝２）

- 従って、最適解は____________で、目的関数の最小値は__________となる

- ポイント
  - 最適解は４変数のうち２変数が0をとる

幾何学的手法による解法(8)（一般の場合）

- 標準形の問題を考える

目的関数:　$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$　→最小化

制約条件:　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

変数がn個、係数行列Aが$m \times n$行列、rank(A)=mとする。任意に(n-m)個の変数選ぶと、他のm個の変数が決定できる。

従って、2変数の場合の2次元平面の代わりに＿＿＿次元空間を考えればよい。

幾何学的手法による解法(9)（一般の場合）

- 実行可能領域は、$x_1=0, x_2=0,$・・・, $x_n=0$が表すn枚の平面(境界面)によって囲まれる凸領域
- 目的関数は平行に移動する平面
- 最適解は実行可能領域の一つの端点
  - すなわち__________枚の境界面が交わる点

幾何学的手法による解法（10）（一般の場合）

- 従って
  - [最適解の候補]＝[n変数のうちn-m変数が0]

n変数のうちn-m変数を0とした$(x_1, \cdots, x_n)$を
________と呼び、

それ以外の変数を__________と呼ぶ。

幾何学的手法による解法（11）（一般の場合）

- さらに一般的に考えた場合
  - 実行可能領域が閉じていない場合がある
  - 閉じていない場合、最適解が存在しない場合がある。つまり、目的関数は無限に大きく（小さく）できる
- 最適解が存在しない問題を**有界でない**または、**非有界**という。
  - **全ての基底解から目的関数を計算すればよい。**

幾何学的手法による解法(12)(基底形式)

目的関数: $2x_1 + x_3 + x_4 \rightarrow$ 最小化

制約条件:
$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 12 \\
4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 &= 8 \\
x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad \ldots,\quad x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$
(式:2. 1)

- 係数行列 $\boldsymbol{A}$=

rank($\boldsymbol{A}$)=2より、5つの変数のうち2変数は残りの3変数によって決定される

x_4=________________________

x_5=________________________

幾何学的手法による解法（13）（基底形式）

- 目的関数も3つの変数x_1, x_2, x_3で書ける

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_3 + x_4 &= 2x_1 + x_3 + (\underline{\hspace{8cm}}) \\
&= \underline{\hspace{10cm}}
\end{aligned}
$$

幾何学的手法による解法（14）（基底形式）

- n変数、制約条件の式の数がmの場合
  - m個の変数$\boldsymbol{x}_B=(x_1, x_2, x_3)$: ________________
  - $(n\text{-}m)$個の変数$\boldsymbol{x}_N=(x_1, x_2, x_3)$: ________________

- ポイント
  - 目的関数とm個の基底変数は、$n\text{-}m$個の非基底変数によって　表現可能

幾何学的手法による解法(15)(基底形式)

- ある非基底変数を選択したときの、基底変数・目的関数の表現法

目的関数：　$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$　→最小化

制約条件：　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$　　（標準形）

$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

- n次元の変数ベクトル $\boldsymbol{x}$　→　$\boldsymbol{x}_B$　　$\boldsymbol{x}_N$
- $m \times n$の係数行列 $\boldsymbol{A}$　→　$\boldsymbol{B}$ ($m \times m$行列)　　$\boldsymbol{N}$ ($m \times n\text{-}m$行列)
- n次元の費用ベクトル$\boldsymbol{c}$　→　$\boldsymbol{c}_B$　　$\boldsymbol{c}_N$

　　基底部分　　非基底部分

幾何学的手法による解法（16）（基底形式）

- $\boldsymbol{Ax}$を変換すると　$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{Nx}_N+\boldsymbol{Bx}_B=\boldsymbol{b}$
- $\boldsymbol{B}$が正則行列あるから

$$\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N$$

- $\boldsymbol{c}$を分けることにより

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N+\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B\\
&= \boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N+\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N\right)\\
&= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+\left(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\right)\boldsymbol{x}_N
\end{aligned}$$

幾何学的手法による解法(17)（基底形式）

- 基底解＝______個の変数を0としたもの
  - ____________を全て0 → $\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$
- よって

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_B &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\
f(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ であるとき、この基底解は実行可能

幾何学的手法による解法(18)(基底形式)

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \left(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\right)\boldsymbol{x}_N$$

- $\left(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\right) \geq \boldsymbol{0}$ のとき、$\boldsymbol{x}_N \geqq \boldsymbol{0}$より、目的関数が最小となるのは、$\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$のときである、従って現在得られている基底解は____________________

- $\left(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\right)_i < 0$ となる要素があるとき:
- 非基底変数の選択を間違えており、当該変数を__________することによって、目的関数をもっと__________することが出来る

課題

- 1．次のように定式化された問題を標準形に書き換えよ。

$$\text{目的関数}: x_1 + 2x_2 + x_3 \to \text{最大化}$$

$$\text{制約条件}: x_1 + x_2 \leq 10$$

$$-x_1 + x_3 \geq 8$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

- 2．26頁式2.1で与えられた問題を基底形式に書き直せ。また、基底変数、非基底変数、基底解、基底解における目的関数の値を求めよ。さらに、当該基底解の最適性を説明せよ。