問 1

まず誤差εの分散をσ^2と定義する。

$$\sigma^2 = V(\varepsilon) = V(X)$$

標本平均の分散は X_i の独立性より

$$V(\bar{X}) = E\left(\left(\bar{X}-\theta\right)^2\right) = E\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \theta\right)^2\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\theta\right)\right]^2\right) = \frac{nV(\bar{X})}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

従って

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\theta\right)-\left(\bar{X}-\theta\right)\right]^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\theta\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\theta\right)\left(\bar{X}-\theta\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\bar{X}-\theta\right)^2\right)$$

$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\theta\right) = n\left(\bar{X}-\theta\right)$に注意

$$= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\theta\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\bar{X}-\theta\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[nV(X) - nV(\bar{X})\right] = \frac{1}{n-1}\left[n\sigma^2-\sigma^2\right] = \sigma^2$$

$\hat{\sigma}^2$ の不偏性は明らかである。

以上

問 2

正規分布の確率密度関数は

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

である。定義よりθのピットマン推定量は

$$\hat{\theta}^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\prod_{i=1}^{n} f(X_i-\theta)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n} f(X_i-\theta)d\theta}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)d\theta}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\theta^2 - 2\theta\sum_{i=1}^{n}X_i + \sum_{i=1}^{n}X_i^2\right]\right)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\theta^2 - 2\theta\sum_{i=1}^{n}X_i + \sum_{i=1}^{n}X_i^2\right]\right)d\theta}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\left(\theta-\bar{X}\right)^2+\beta\right]\right)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\left(\theta-\bar{X}\right)^2+\beta\right]\right)d\theta}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\left(\theta-\bar{X}\right)^2\right]\right)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\left(\theta-\bar{X}\right)^2\right]\right)d\theta}$$

但し

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$\beta = \sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2$$

ここで

$$\tilde{\theta} = \theta - \bar{X}$$

$$\tilde{\sigma} = \sigma/\sqrt{n}$$

とおけば

$$\hat{\theta}^* = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\tilde{\theta}+\bar{X}\right)\exp\left(-\frac{\tilde{\theta}^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right)d\theta}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\tilde{\theta}^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right)d\theta}$$

$$= \bar{X}$$

結論として測定において誤差を表す確率変数が正規分布に従えばビットマン推定量は測定データの算術平均に等しいことである。

以上

問 3

定義よりθの尤度関数は

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f\left(X_i-\theta\right)$$

n 個の観測値の確率密度はすべてが 0 でないθは区間$\left[\max_i X_i - 1,\ \min_i X_i + 1\right]$であるから、尤度関数を最大にする母数

$$\hat{\theta} \in \left[\max_i X_i - 1,\ \min_i X_i + 1\right]$$

この場合、尤度の最大値を与える$\hat{\theta}$は一意に決められないことに注意する。

以上

問 4

コインにいかさまが施されているかどうか判定するには仮説検定を行う。コインにいかさまが施されていない帰無仮説とする。このときコインを投げるごとに表・裏が出る確率は$p = 0.5$となる。また検定に用いる統計量はこの問題でN回コイン投げをして表が出る回数Kにする。このようにKは２項分布に従い、その確率は次式で与えられる

$$P(K=k)={}_NC_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}={}_NC_k\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

但し、${}_NC_k=\frac{N!}{k!(N-k)!}$ で定義される。

${}_NC_k={}_NC_{N-k}$ より $P(K=k)=P(K=N-k)$ となり分布の対称性がわかる。したがって有意水準が α であるときに

$$\sum_{k=0}^{U}{}_NC_k\left(\frac{1}{2}\right)^N<\frac{\alpha}{2}$$

を満たす最大の自然数 U を求めれば統計量 K に対して

$K<U$ または $K>N-U$ ：帰無仮説を棄却

$U\le K\le N-U$ ：帰無仮説を受容

というように仮説を検定できる。

N が十分大きいのであれば中心極限定理を用いることができ K は正規分布に従うように見なせる。また

$$E(K)=\frac{N}{2}、V(K)=\frac{N}{4}$$

従って

$$T=\frac{(K-N/2)}{\sqrt{N/4}}=\frac{2K-N}{\sqrt{N}}$$

は標準正規分布に近づいていく。

有意水準が α であるときに

$$P(T>u)<\frac{\alpha}{2}$$

を満たす u を求めれば統計量 T に対して

$T<-u$ または $T>u$ ：帰無仮説を棄却

$-u\le T\le u$ ：帰無仮説を受容

というように仮説を検定できる。

いま、有意水準は 5%であり、表を調べれば u は 1.960 になる。なお $N=10000$、$K=5091$ で、

T = 1.820 < 1.960 になるので、帰無仮説を受容する。

以上

問 5

準備

1. $u(t)$ のフーリエ変換

$$\begin{aligned}U(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\exp(-j\omega t)\cdot dt=\int_0^b\exp(-j\omega t)\cdot dt\\&=\left.\frac{\exp(-j\omega t)}{-j\omega}\right|_{t=0}^{b}=\frac{1}{j\omega}\left(1-\exp(-j\omega b)\right)\\&=\frac{\exp(-j\omega b/2)}{j\omega}\left(\exp(j\omega b/2)-\exp(-j\omega b/2)\right)\\&=\frac{2}{\omega}\exp(-j\omega b/2)\sin(\omega b/2)\end{aligned}$$

2. $u(t-nb)$ のフーリエ変換

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}u(t-nb)\exp(-j\omega t)\cdot dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}u(t-nb)\exp\left(-j\omega(t-nb)\right)\exp(-j\omega nb)\cdot dt\\&=\exp(-j\omega nb)\int_{-\infty}^{\infty}u(t-nb)\exp\left(-j\omega(t-nb)\right)\cdot dt\\&=\exp(-j\omega nb)\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\exp(-j\omega t)\cdot dt\\&=\exp(-j\omega nb)U(\omega)\end{aligned}$$

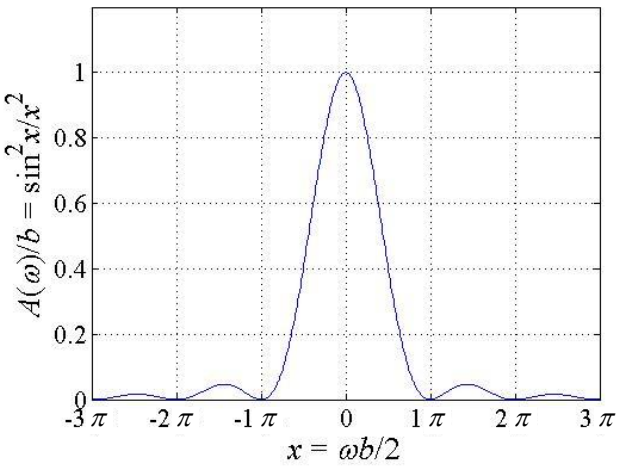
時間区域[−Nb, Nb]で、観察した信号に対してフーリエ変換する

$$\begin{aligned}F_N(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-N}^{N}a_n\cdot u(t-nb)\exp(-j\omega t)\cdot dt\\&=\sum_{n=-N}^{N}a_n\int_{-\infty}^{\infty}u(t-nb)\exp(-j\omega t)\cdot dt\\&=U(\omega)\sum_{n=-N}^{N}a_n\exp(-j\omega nb)\end{aligned}$$

平均電力スペクトル密度

$$\begin{aligned}A(\omega)&=\lim_{N\to\infty}\frac{E\left(\left|F_N(\omega)\right|^2\right)}{(2N+1)b}\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{E\left(\left|U(\omega)\sum_{n=-N}^{N}a_n\exp(-j\omega nb)\right|^2\right)}{(2N+1)b}\\&=\left|U(\omega)\right|^2\lim_{N\to\infty}\frac{E\left(\sum_{n=-N}^{N}a_n^2\left|\exp(-j\omega nb)\right|^2\right)}{(2N+1)b}\\&=\left|U(\omega)\right|^2\lim_{N\to\infty}\frac{(2N+1)}{(2N+1)b}=\frac{\left|U(\omega)\right|^2}{b}\\&=\frac{\left|\frac{2}{\omega}\exp(-j\omega b/2)\sin(\omega b/2)\right|^2}{b}\\&=b\left[\sin\left(\frac{\omega b}{2}\right)\Big/\left(\frac{\omega b}{2}\right)\right]^2\end{aligned}$$

その概形



以上