応用確率統計(a)（期末試験）　　平成 22 年 02 月 15 日

問 1、観測に対する確率モデル　$X=\theta+\varepsilon$　において、n 個の独立な観測値 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が得られるとき、誤差 ε の分散の不偏な推定量である不偏分散が

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$$

になることを証明せよ。ただし θ は未知の確定値であり、$\bar{X}$ が観測値の標本平均とする。

問 2、観測に対する確率モデル　$X=\theta+\varepsilon$　において、誤差 ε の分布が平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従うとする。そのとき、独立な観測値 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に対して未知の母数 θ のピットマン推定量 $\hat{\theta}^*$ を示せ。

問 3、観測に対する確率モデル　$X=\theta+\varepsilon$　において、誤差 ε が確率密度

$$f(\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & ,\ -1<\varepsilon<1\\ 0 & ,\ \text{otherwise}\end{cases}$$

で表される区間[－１，１]上の一様分布に従うとする。n 個の独立な観測値 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が得られるとき、母数 θ の最尤推定量を求めよ。但し最尤推定は尤度関数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f\left(X_i-\theta\right)$ を最大にする母数 θ を求めることである。

問 4、N 回コイン投げをして K 回表が出たとする。このコインにいかさまが施されているかどうか判定するにはどのようにすればよいか考えよ。

なお 10000 回コイン投げをして 5091 回表が出たとするとき、このコインにいかさまが施されているかどうか判定せよ。但し投げる回数は十分多いとして中心極限定理を用いよ。また有意水準を 5%とする。

標準正規分布の累積分布：　$P(x<z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$

$P(x<z)$	0.950	0.955	0.960	0.965	0.970	0.975	0.980	0.985	0.990	0.995
z	1.645	1.695	1.751	1.812	1.881	1.960	2.054	2.170	2.326	2.576

問 5、図 1 に示すようなランダムな BPSK 変調信号の波形を考えよう。この波形は次式で表すことができる。

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\cdot u(t-nb)\quad \text{但し}\quad u(t)=\begin{cases}1 & ,\ 0<t<b\\ 0 & ,\ \text{otherwise}\end{cases}$$

そして、a_n は確率変数で、等確率をもって＋１、または－１をとる。この波形の電力スペクトル密度 $A(\omega)$ は、つぎの式で与えられることを示し、その概形をかけ。

$$A(\omega)=b\left[\sin\left(\frac{\omega b}{2}\right)\Big/\left(\frac{\omega b}{2}\right)\right]^2$$

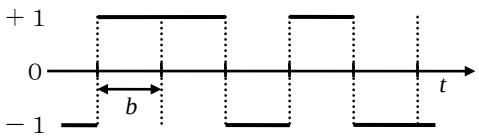

図 1 BPSK 変調信号

注意事項

(a) 試験時間：09 時 00 分から 10 時 30 分まで、時間厳守。

(b) 答案用紙は 3 枚 1 組であり、一人分は 1 組. 各自確認すること。

(c) 各答案用紙に学籍番号・氏名・問題番号などを記入すること。

(d) 不正行為と認定された場合は、今学期のすべての科目が無効になるので、十分注意すること。