問 1

クラメール・ラオの不等式について説明して、証明せよ。

解答

教科書 p.137 定理 11.3 に参照。

但し、コーシー・シュワルツ不等式が次の方が正しい。

$$\begin{aligned} & \int (\hat{\theta} - \theta)^2 \prod_i f(x_i, \theta) dx_i \times \int \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x_i, \theta) \right)^2 \prod_i f(x_i, \theta) dx_i \\ & \geq \left(\int (\hat{\theta} - \theta) \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x_i, \theta) \right) \prod_i f(x_i, \theta) dx_i \right)^2 \\ & = 1 \end{aligned}$$

以上

問 2

確率モデル

$$X = \theta + \varepsilon$$

において、誤差 ε の分布が平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従うとする。 n 個の独立な観測値 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が得られるとき、次の推定量をそれぞれ計算せよ。

(a) θ の最尤推定量

(b) σ^2 の最尤推定量

解答

θ と σ に対する対数尤度関数を下のように定義する。

$$\begin{aligned} L(\theta, \sigma) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log f(X_i; \theta, \sigma) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(X_i - \theta)^2}{2\sigma^2} \right] \right\} \\ &= \frac{-1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\log(\sqrt{2\pi}\sigma) + \frac{(X_i - \theta)^2}{2\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

(a) θ の最尤推定量

$$\frac{\partial L(\theta, \sigma)}{\partial \theta} = \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta) = \frac{1}{n\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\theta \right)$$

$$\frac{\partial^2 L(\theta, \sigma)}{\partial \theta^2} = \frac{-1}{n\sigma^2} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{-1}{\sigma^2} < 0$$

であるから、 $\frac{\partial L(\theta, \sigma)}{\partial \theta} = 0$ のとき、 $L(\theta, \sigma)$ が最大になる。

したがって

$$\sum_{i=1}^n X_i - n\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

θ の最尤推定量は

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L(\theta, \sigma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

(b) σ^2 の最尤推定量

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\theta, \sigma)}{\partial \sigma} &= \frac{-1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma} - \frac{(X_i - \theta)^2}{\sigma^3} \right] \\ &= \frac{-1}{n\sigma^3} \sum_{i=1}^n \left[\sigma^2 - (X_i - \theta)^2 \right] \\ &= \frac{-1}{n\sigma^3} \left[n\sigma^2 - \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L(\theta, \sigma)}{\partial \sigma^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma^2} - \frac{3(X_i - \theta)^2}{\sigma^4} \right] \\ &= \frac{1}{n\sigma^4} \sum_{i=1}^n \left[\sigma^2 - 3(X_i - \theta)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n\sigma^4} \left[n\sigma^2 - 3 \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2 \right] \end{aligned}$$

$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2$ のときだけ、 $\frac{\partial L(\theta, \sigma)}{\partial \sigma} = 0$ となって、

しかも σ の二次偏微分式に代入すると

$$\frac{\partial^2 L(\theta, \sigma)}{\partial \sigma^2} = \frac{-2}{n\sigma^4} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2 < 0 \text{ になる。}$$

したがって、 $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2$ のとき、 $L(\theta, \sigma)$ が最大

になる。

σ^2 の最尤推定量は

$$\hat{\sigma} = \arg \max_{\sigma} L(\theta, \sigma) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2$$

以上