問 1

確率モデル

$$X=\theta+\varepsilon$$

において、誤差εの分布が[－0.5, 0.5]上の一様分布、すなわち

$$f(\varepsilon)=\begin{cases}1 & ,|\varepsilon|\le 0.5\\ 0 & ,\text{otherwise}\end{cases}$$

のとき、独立な観測値$X_1, X_2, \cdots, X_n$に対して未知の母数θのピットマン推定量$\hat{\theta}^*$を求めよ。

解答

定義よりθのピットマン推定量は

$$\hat{\theta}^*=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\prod_{i=1}^{n}f(X_i-\theta)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}f(X_i-\theta)d\theta}$$

n 個の観測値の確率密度はすべてが 1 となるθは区間$\left[\max_i X_i-0.5,\ \min_i X_i+0.5\right]=[\alpha,\beta]$であるから、

$$\hat{\theta}^*=\frac{\int_{\alpha}^{\beta}\theta d\theta}{\int_{\alpha}^{\beta}1d\theta}=\frac{1}{2}\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}$$
$$=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\max_i X_i+\min_i X_i}{2}$$

となる。

結論として測定において誤差を表す確率変数が平均 0 の一様分布に従えばビットマン推定量は測定データの最大値と最小値の平均に等しいということである。

以上

問 2

確率モデル

$$X=\theta+\varepsilon$$

において、誤差εの分布が平均 0、分散σ^2の正規分布に従うとする。そのとき独立な観測値$X_1, X_2, \cdots, X_n$に対して未知の母数θのピットマン推定量$\hat{\theta}^*$を求めよ。

解答

正規分布の確率密度関数は

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

である。定義よりθのピットマン推定量は

$$\hat{\theta}^*=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\prod_{i=1}^{n}f(X_i-\theta)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}f(X_i-\theta)d\theta}$$
$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)d\theta}$$
$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)d\theta}$$
$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\theta^2-2\theta\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right]\right)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\theta^2-2\theta\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right]\right)d\theta}$$
$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\left(\theta-\bar{X}\right)^2+\beta\right]\right)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\left(\theta-\bar{X}\right)^2+\beta\right]\right)d\theta}$$
$$=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\left(\theta-\bar{X}\right)^2\right]\right)d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\left(\theta-\bar{X}\right)^2\right]\right)d\theta}$$

但し

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$
$$\beta=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2$$

ここで

$$\tilde{\theta}=\theta-\bar{X}$$
$$\tilde{\sigma}=\sigma/\sqrt{n}$$

とおけば

$$\hat{\theta}^*=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\tilde{\theta}+\bar{X}\right)\exp\left(-\frac{\tilde{\theta}^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right)d\theta}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\tilde{\theta}^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right)d\theta}$$
$$=\bar{X}$$

結論として測定において誤差を表す確率変数が正規分布に従えばビットマン推定量は測定データの算術平均に等しいことである。

以上