問 1

定数 $0 < a, b < 1$ が与えられたとする。集合$\{0, 1, 2, \ldots, n\}$上の二つの 2 項分布

$$p(r) = {}_nC_r\ a^r (1-a)^{n-r}$$
$$q(r) = {}_nC_r\ b^r (1-b)^{n-r}$$

のカルバック距離を $D(p\|q)$ とすると、$a,\ b$ の関数 $f(a, b)$ が存在して

$$D(p\|q) = n\, f(a, b)$$

と書けることを示せ。また $f(a, b)$ を求めよ

解答

$$D(p\|q) = \sum_{r=0}^{n} p(r) \log\left[\frac{p(r)}{q(r)}\right]$$
$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\ a^r (1-a)^{n-r} \log\left[\frac{a^r (1-a)^{n-r}}{b^r (1-b)^{n-r}}\right]$$
$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\ a^r (1-a)^{n-r} \left\{\log\left[\left(\frac{a}{b}\right)^r\right] + \log\left[\left(\frac{1-a}{1-b}\right)^{n-r}\right]\right\}$$
$$= \sum_{r=1}^{n} r \frac{n!}{(n-r)!r!} a^r (1-a)^{n-r} \log\left(\frac{a}{b}\right)$$
$$+ \sum_{r=0}^{n-1} (n-r) \frac{n!}{(n-r)!r!} a^r (1-a)^{n-r} \log\left(\frac{1-a}{1-b}\right)$$
$$= n\left[a \log\left(\frac{a}{b}\right) \sum_{r=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}\ a^{r-1} (1-a)^{n-r}\right.$$
$$\left. + (1-a) \log\left(\frac{1-a}{1-b}\right) \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!}\ a^r (1-a)^{n-r-1}\right]$$
$$= n\left[a \log\left(\frac{a}{b}\right) \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!}\ a^r (1-a)^{n-r-1}\right.$$
$$\left. + (1-a) \log\left(\frac{1-a}{1-b}\right) \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!}\ a^r (1-a)^{n-r-1}\right]$$
$$= n\left[a \log\left(\frac{a}{b}\right) + (1-a) \log\left(\frac{1-a}{1-b}\right)\right]$$
$$f(a, b) = a \log\left(\frac{a}{b}\right) + (1-a) \log\left(\frac{1-a}{1-b}\right)$$

以上

問 2

カルバック情報量の性質を述べ、その性質の成り立つことを示せ。

解答

教科書 p.86 の定理 7.1 とその証明を参照。

以上