問 1

X の特性関数：

$$\varphi(t)=E\left(e^{ixt}\right)=\int_{x\geq 0}e^{ixt}p(x)\cdot dx$$
$$=\frac{1}{\lambda}\int_{x\geq 0}e^{(it-1/\lambda)x}dx=\frac{1}{1-i\lambda t}$$

平均：

$$E(x)=\frac{\varphi'(t)\big|_{t=0}}{i}=\left.\frac{\lambda}{(1-i\lambda t)^2}\right|_{t=0}=\lambda$$

分散：

$$E\left(x^2\right)=\frac{\varphi''(t)\big|_{t=0}}{-1}=\left.\frac{2\lambda^2}{(1-i\lambda t)^3}\right|_{t=0}=2\lambda^2$$

$$V(x)=E\left(x^2\right)-E(x)^2=2\lambda^2-\lambda^2=\lambda^2$$

以上

問 2

X、Y の確率密度関数をそれぞれ $p_X(x)$、$p_Y(x)$ とし、

$$p_X(x)=p_Y(x)=p(x)=x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$Z=X^2$ として、Z の確率密度関数を計算する。

$$p_Z(z)=\int_0^\infty \delta\left(z-x^2\right)p_X(x)dx$$

$$x=\sqrt{z}$$
$$\left|\left(z-x^2\right)'\right|=|-2x|=2\sqrt{z}$$

$$p_Z(z)=\frac{p_X\left(\sqrt{z}\right)}{2\sqrt{z}}=\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{z}{2}\right)\qquad (z\geq 0)$$

$Z_1=X^2$、$Z_2=Y^2$ とし、上の結果から Z_1、Z_2 の確率密度関数は下のようになる。しかも、X、Y が独立であるから、Z_1、Z_2 も独立な確率変数である。

$$p_{Z_1}(z)=p_{Z_2}(z)=p_Z(z)$$

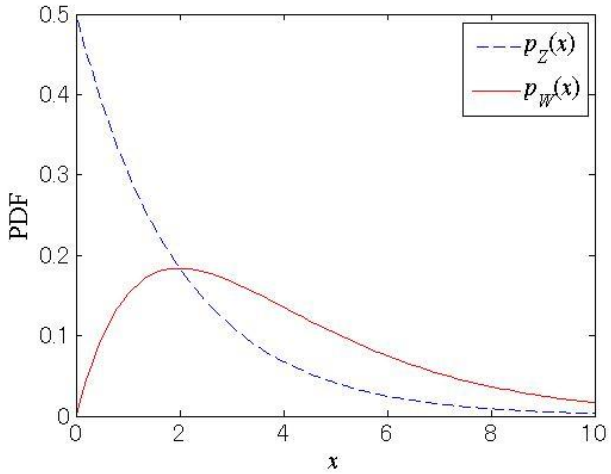
したがって、

$$p_W(w)=\int_0^\infty\int_0^\infty \delta(w-z_1-z_2)\,p_{Z_1}(z_1)\,p_{Z_2}(z_2)\,dz_1dz_2$$

$$z_1=w-z_2\geq 0$$
$$w\geq z_2$$

$$p_W(w)=\int_0^w p_{Z_1}(w-z_2)\,p_{Z_2}(z_2)\,dz_2$$
$$=\int_0^w\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{(w-z_2)}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{z_2}{2}\right)dz_2$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^w\exp\left(-\frac{w}{2}\right)dz_2=\frac{w}{4}\exp\left(-\frac{w}{2}\right)$$

$$(w\geq 0)$$



以上

問 3

$f(x)=|x|^p$ を考えるとマルコフ不等式より

$P\left(|X|^p>tE\left(|X|^p\right)\right)\leq\frac{1}{t}$ が得られる。

$\varepsilon^p=tE\left(|X|^p\right)$ とすると上の式が

$P\left(|X|^p>\varepsilon^p\right)\leq\frac{E\left(|X|^p\right)}{\varepsilon^p}$ に書き換わる。

また $P\left(|X|^p>\varepsilon^p\right)=P\left(|X|>\varepsilon\right)$ から、

$$P\left(|X|>\varepsilon\right)\leq\frac{E\left(|X|^p\right)}{\varepsilon^p}$$

上の結果において、X の代わりに X_n-X を代入する

と　$P\left(\left|X_n - X\right| > \varepsilon\right) \le \dfrac{E\left(\left|X_n - X\right|^p\right)}{\varepsilon^p}$。

すべての $\varepsilon > 0$ に対して、右辺は $\left\{X_n\right\}$ の平均収束条件より 0 に収束する。左辺の系列は右辺の系列によって上限されるため左辺の系列も 0 に収束する。つまり確率変数の列 $\left\{X_n\right\}$ は確率収束であることが分かる。この結果より平均収束する確率変数系列は確率収束することを証明した。

以上

問 4

$$v(x) = \int y^2 p(y|x)\,dy$$
$$r(x) = \int y p(y|x)\,dy = E(Y|x)$$

と定義する。

$$\begin{aligned}
L(f) &= \iint (y - f(x))^2 p(x,y)\cdot dxdy \\
&= \int p(x) \int p(y|x)\left\{y^2 - 2y\cdot f(x) + f(x)^2\right\}\cdot dydx \\
&= \int p(x)\left\{v(x) - 2r(x) f(x) + f(x)^2\right\}\cdot dx \\
&= \int p(x)\left[\left\{f(x) - r(x)\right\}^2 + v(x) - r(x)^2\right]\cdot dx
\end{aligned}$$

したがって $L(f)$ は $f(x) = E(Y|x)$ のとき最小値

$$\int p(x)\left\{v(x) - r(x)^2\right\}\cdot dx$$

をとる。

以上

問 5

X の確率密度関数は

$$p(x) = \begin{cases} 1/2 & , 0 \le x \le 2 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

したがって X の平均は

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x\cdot dx = 1$$

X の分散は

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 p(x)\cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x-1)^2\cdot dx = \frac{1}{3}$$

(a) Y_n の

平均：$E\left[Y_n\right] = E\left[X\right] = 1$；分散：$V\left[Y_n\right] = \dfrac{V\left[X\right]}{n} = \dfrac{1}{3n}$

したがって Y_{50} の平均は 1、分散は $\dfrac{1}{150}$ である。

(b) $p\left(\left|Y_{50} - 1\right| > 0.2\right) \le p\left(\left|Y_{50} - 1\right| \ge \sigma_Y t\right) \le \dfrac{1}{t^2}$

$$\sigma_Y t = 0.2 \Rightarrow \frac{1}{t^2} = 25\sigma_Y^2 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}
p\left(0.8 \le Y_{50} \le 1.2\right) &= 1 - p\left(\left|Y_{50} - 1\right| > 0.2\right) \\
&\ge 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{5}{6} \cong 0.833
\end{aligned}$$

(c)

$$p\left(0.8 \le Y_n \le 1.2\right) = 1 - p\left(\left|Y_n - 1\right| > 0.2\right) \ge 1 - \frac{1}{t^2}.$$

$$\frac{1}{t^2} = 25\sigma_Y^2 \le 0.01 \Rightarrow \sigma_Y^2 = \frac{1}{3n} \le 0.0004$$

$$n \ge \frac{10000}{12} = 833.333$$

したがって n の最小の値は 834 である。

以上

問 6

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) &= H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = -\sum_{j=1}^{M} p_Y(Y_j)\log p_Y(Y_j) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} p_X(X_i)\sum_{j=1}^{M} p_{Y|X}(Y_j|X_i)\log p_{Y|X}(Y_j|X_i) \\
&= -\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} p_{XY}(X_i, Y_j)\log p_Y(Y_j) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} p_{XY}(X_i, Y_j)\log p_{Y|X}(Y_j|X_i) \\
&= \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} p_{XY}(X_i, Y_j)\log \frac{p_{Y|X}(Y_j|X_i)}{p_Y(Y_j)} \\
&= \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} p_{XY}(X_i, Y_j)\log \frac{p_{XY}(X_i, Y_j)}{p_X(X_i)\,p_Y(Y_j)} \\
&= D\left[p_{\mathbf{XY}}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \,\middle\|\, p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})\,p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y})\right]
\end{aligned}$$

以上