中心極限定理

多くのデータの算術平均は $\boxed{\text{正規分布}}$ に従う確率変数に $\boxed{\text{法則収束}}$ する.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{未知}\\ \text{確率構造}\end{array}} \xrightarrow{\text{出力}} \underbrace{\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}}_{\text{確率変数}}$$

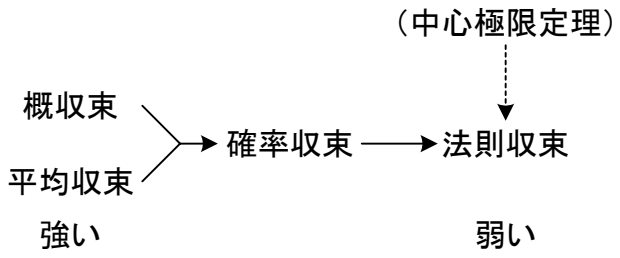
※但し$\{X_i\}$は互いに $\boxed{\text{独立で}}$ 同じ確率分布に従っていると仮定する.
→ i.i.d.(independent identical distributed)仮定

nケのデータ → $\left\{ Y_n = \dfrac{X_1 + \cdots X_n}{n} \right.$:サンプル平均

【大数法則】

$$\lim_{n\to\infty} E\ \underbrace{(Y_n)}_{\substack{\uparrow \\ \text{確率変数}}} \to E\ \underbrace{(X)}_{\substack{\uparrow \\ \text{確率変数}}}$$

【収束】



例)地デジ:OFDM → フーリエ変換(FFT, IFFT)

$$\underset{\text{周波数軸上の情報配置}}{(s_1, \cdots, s_n)} \xrightarrow{\text{IFFT}} \underset{\text{時間軸上の配置に並べかえる}}{(a_1, \cdots, a_n)}$$

$\boxed{\text{振幅分布が［ガウス分布］に従う ⇒ 増幅器設計に必要な情報}}$

【確率変数列の収束】

1)概収束:

$[X_n(\omega) \to X(\omega)]$が確率 1 で成立

2)平均収束:$(p > 0)$

$$\lim_{n\to 0} \int |X_n(\omega) - X(\omega)|^p\, p(\omega)\, d\omega \to 0$$

3)確率収束:

$$A_\varepsilon = \{\omega \| X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

$$\lim_{n\to 0} p[A_\varepsilon] \to 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad p[|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon] \to 0$$

4)法則収束:任意の連続有界関数$f(\cdot)$に対して

$$\int f(X_n(\omega)) p(\omega)\, d\omega \to \int f(X(\omega)) p(\omega)\, d\omega$$

$\boxed{\text{何かを経由して観察する！}}$ → 法則収束の意義

$$\forall f(\cdot);\ E[f(X_n)] \to E[f(X)]$$

X :確率変数
$X_1,\cdots X_n$: X と同じ分布に従う確率変数で，互いに独立
$Y_n = \dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ とする.

$$\text{平均}: E(Y_n) = E(X) = m$$
$$\text{分散}: V(Y_n) = \frac{V(X)}{n}$$

$\boxed{\text{平均は同じ，分散は}\frac{1}{n}\text{に}}$

$$\because)\quad E(Y_n) = E\left[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\left[\underbrace{E(X_1)}_{E(X)}+\cdots+\underbrace{E(X_n)}_{E(X)}\right]$$
$$= E(X)$$

$$E\left\{(Y_n-m)^2\right\} = E\left\{\left(\frac{(X_1-m)+\cdots+(X_n-m)}{n}\right)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{n^2}E\left\{(X_1-m)^2+\cdots+(X_n-m)^2+\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} a_{ij}(X_i-m)(X_j-m)\right\}$$
$$= \frac{1}{n^2}\left\{E\left[(X_1-m)^2\right]+\cdots+E\left[(X_n-m)^2\right]+\sum a_{ij}\,\underline{E\left[(X_i-m)(X_j-m)\right]}\right\}$$

X_i と X_j は互いに独立だから
$$E\left[(X_i-m)(X_j-m)\right] = E[X_i-m]\cdot E[X_j-m] = 0$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{\underbrace{V(X_1)}_{V(X)}+\cdots+\underbrace{V(X_n)}_{V(X)}\right\}$$
$$= \frac{V(X)}{n}$$

チェビシェフ不等式から $Y_n \to m$（確率収束）が証明できる.

【重み付け平均の最適解】

$$Y_n \overset{\Delta}{=} c_1X_1+\cdots+c_nX_n,\quad \text{但し，}c_1+\cdots+c_n=1$$

$$E(Y_n) = E[c_1X_1+\cdots+c_nX_n]$$
$$= c_1E(X_1)+\cdots+c_nE(X_n) = (c_1+\cdots c_n)E(X) = E(X)$$

※どんな重み付けでも平均は同じ

$(c_1,\cdots,c_n)$ の最適な係数？ $\Rightarrow \underset{(c_1,\cdots c_n)}{\mathrm{Min}}\, V(Y_n)$

$$
\begin{aligned}
V(Y_n) &= E\left(\left[c_1X_1+\cdots c_nX_n-m\right]^2\right)\\
&= E\left\{\left[c_1(X_1-m)+c_2(X_2-m)+\cdots+c_n(X_n-m)\right]^2\right\}\\
&= E\left[a_1{}^2(X_1-m)^2\right]+\cdots+E\left[c_n{}^2(X_n-m)^2\right]+\phi\\
&= \left(c_1{}^2+\cdots c_n{}^2\right)V(X)
\end{aligned}
$$

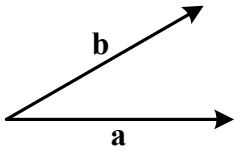
$$
\underset{\substack{(c_1,\cdots,c_n)\\ \sum_i c_i=1}}{\mathrm{Min}}\ V(Y_n)=\underset{\substack{(c_1,\cdots c_n)\\ \sum_i c_i=1}}{\mathrm{Min}}\left(c_1{}^2+\cdots+c_n{}^2\right)V(X)
$$

$\Rightarrow\ \left(c_1{}^2+\cdots+c_n{}^2\right)$を最小化

$\mathbf{c}=(c_1,\cdots,c_n),\quad \mathbf{d}=(1,\cdots,1)$

$\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=1$

$|\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}|^2\le|\mathbf{c}|^2\cdot|\mathbf{d}|^2$



$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\le|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

$1\le\left(c_1{}^2+\cdots+c_n{}^2\right)\cdot n$　　$\mathbf{c}$と$\mathbf{d}$が同じ方向であったら，等号成立

$\Rightarrow\ c_1=\cdots=c_n=\dfrac{1}{n}$が最適解

$\Rightarrow\ Y_n=\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$（最適：一番分散が少ない）

$$
\left.\begin{aligned}
E(Y_n)&\Rightarrow E(X)\\
V(Y_n)&=\frac{V(X)}{n}
\end{aligned}\right)
$$

where

$E(X)=m$

$V(X)=\sigma^2$

【チェビシャフ不等式】

$$
p\left[|Y_n-m|\ge\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right]\le\frac{1}{t^2}
$$

Let $\varepsilon=\dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}\quad\therefore\quad\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

$$
\lim_{n\to0}p\left[|Y_n-m|>\varepsilon\right]\le\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\ \to\ 0
$$

$\underset{\text{サンプル平均値}}{Y_n}\ \to\ m$に確率収束する（大数の弱収束定理）

特に$E(X)$が <u>有限確定</u> であれば$Y_n\ \to\ m$が <u>概収束</u> する（大数の強収束定理）

例)有限確定のコーシー分布

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\substack{A\to\infty\\ A'\to\infty}}\int_{-A'}^{A}\frac{x}{1+x^2}\,dx \quad \to \quad \text{有限確定しない}$$

［収束速度が違う］

確率変数 X が平均 0, 分散 σ^2 であるとする　$\boxed{X\text{の分布は未知}}$

中心極限定理, $X_1,\cdots,X_n$: 互いに独立で X と同じ分布に従うとする

$Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k$ は平均 0, 分散 σ^2 の $\boxed{\text{正規分布}}$ に従う確率変数に $\boxed{\text{法則収束}}$ する.

つまり, 任意の有界連続関数 $f(\cdot)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}E\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum X_k\right)\right]=E[f(z)]$$

【証明のスケッチ】

$\boxed{Z_n \to Z\text{に法則収束}}$ ⇒ $\boxed{\text{特性関数, }\varphi_n(t)\text{が各点}t\text{で}\varphi(t)\text{に収束}}$

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t)&=E[\exp(itZ_n)]\\
&=E\left[\exp\left(it\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\sum X_k\right)\right]\\
&=E\left[\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{itX_k}{\sqrt{n}}\right)\right]\\
&=\prod_{k=1}^{n}E\left[\exp\left(\frac{itX_k}{\sqrt{n}}\right)\right]=E\left[\exp\left(\frac{itX}{\sqrt{n}}\right)\right]^n\\
&=\left(\int\exp\left(\frac{itx}{\sqrt{n}}\right)p(x)\,dx\right)^n\\
&=\left(1-\frac{t^2\sigma^2}{2n}\right)^n\\
&=e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \quad \leftarrow \quad \boxed{e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to 0}\varphi_n(t)=\exp\left(-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)$ → 平均 0, 分散 σ^2 の正規分布の特性関数

つまり, $Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k$ は Z (平均 0, 分散 σ^2 の正規分布)に法則収束する.