問 1

X が下の確率密度関数に従う確率変数であるとする。

$$p(x)=\frac{x}{4}\exp\left(-\frac{x}{2}\right) \qquad (x\geq 0)$$

X の平均とモードを求めよ。

解答

平均：

$$m=\int_0^\infty x\cdot p(x)\cdot dx=4$$

モード：

$$\hat{x}=\arg\max_{x\in X} p(x)$$

$$\Rightarrow p'(\hat{x})=\frac{1}{4}e^{-\hat{x}/2}-\frac{\hat{x}}{8}e^{-\hat{x}/2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}-\frac{\hat{x}}{8}=0\Rightarrow \hat{x}=2$$

以上

問 2

ある確率変数 X の平均が 9 で分散が 9 であるという。チェビシェフの不等式を使って、「確率 0.95 以上で X が入る区間」を求めよ。但し $\sqrt{5}=2.236$ とする。

解答

チェビシェフの不等式から次の式が成り立つ。

$$P(|X-9|<3t)\geq 1-\frac{1}{t^2}$$

$1-\frac{1}{t^2}=0.95$ を満たすためには $t=\sqrt{20}$。

したがって、求める区間は

$$-3\sqrt{20}<X-9<3\sqrt{20}\Rightarrow -4.416<X<22.416$$

以上

問 3

確率変数 X が有限な積分値 $E\left(|X|^p\right)$ を持つとする ($p>0$)。このとき、次の問いに答えよ。

(a) 不等式 $P(|X|>\varepsilon)\leq E\left(|X|^p\right)/\varepsilon^p$ を示せ。

(b) 確率変数の列 $\{X_n\}$ が X に p 次平均収束するとき、すなわち

$$\lim_{n\to\infty}E\left(|X_n-X|^p\right)=0$$

のとき、$\{X_n\}$ が X に確率収束することを示せ。

解答

(a) $f(x)=|x|^p$ を考えるとマルコフ不等式より

$P\left(|X|^p>tE\left(|X|^p\right)\right)\leq\frac{1}{t}$ が得られる。

$\varepsilon^p=tE\left(|X|^p\right)$ とすると上の式が

$P\left(|X|^p>\varepsilon^p\right)\leq\frac{E\left(|X|^p\right)}{\varepsilon^p}$ に書き換わる。

また $P\left(|X|^p>\varepsilon^p\right)=P(|X|>\varepsilon)$ から、

$$P(|X|>\varepsilon)\leq\frac{E\left(|X|^p\right)}{\varepsilon^p}$$

(b) (a) の結果において、X の代わりに X_n-X を代入すると $P(|X_n-X|>\varepsilon)\leq\frac{E\left(|X_n-X|^p\right)}{\varepsilon^p}$。

すべての $\varepsilon>0$ に対して、右辺は $\{X_n\}$ の平均収束条件より 0 に収束する。左辺の系列は右辺の系列によって上限されるため左辺の系列も 0 に収束する。つまり確率変数の列 $\{X_n\}$ は確率収束であることが分かる。この結果より平均収束する確率変数系列は確率収束することを証明した。

以上