問 1

ある線形システムのインパルスレスポンスは

$H(t)=\delta(t)+\frac{1}{2}\delta(t-1)+\frac{1}{4}\delta(t-2)$ とする。

入力信号 $p(t)$ が与えたとき、出力信号 $q(t)$ が下の式になる。$q(t)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t-\tau)H(\tau)d\tau$

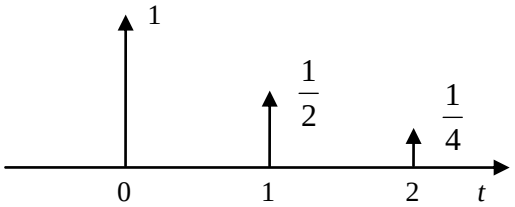
(a) $p(t)=\delta(t)$ のとき、出力信号を求め、図示せよ。

(b) $p(t)=\begin{cases}1 & ,0\le t<1\\ 0 & ,\text{otherwise}\end{cases}$ のとき、出力信号を求め、図示せよ。

回答

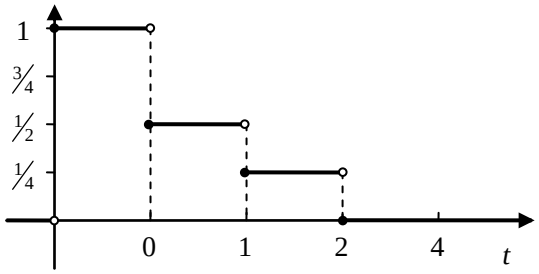
(a)

$$q(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)H(\tau)d\tau=H(t)$$



(b)

$$\begin{aligned}q(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}p(t-\tau)H(\tau)d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}p(t-\tau)\delta(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}p(t-\tau)\delta(\tau-1)d\tau\\&\quad+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}p(t-\tau)\delta(\tau-2)d\tau\\&=p(t)+\frac{1}{2}p(t-1)+\frac{1}{4}p(t-2)\\&=\begin{cases}1\ ,\text{for } 0\le t<1;\ \frac{1}{2}\ ,\text{for } 1\le t<2;\\ \frac{1}{4}\ ,\text{for } 2\le t<3;\ 0\ ,\text{for otherwise.}\end{cases}\end{aligned}$$



以上

問 2

X、Y が独立で、下の確率密度関数に従う確率変数であるとする。

$$p(x)=x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\qquad(x\ge 0)$$

このとき、次の Z と W の確率密度関数を求め、簡単に図示せよ。

(a) $Z=X^2$

(b) $W=X^2+Y^2$

回答

X、Y の確率密度関数をそれぞれ $p_X(x)$、$p_Y(x)$ とし、

$$p_X(x)=p_Y(x)=p(x)$$

(a)

$$p_Z(z)=\int_0^{\infty}\delta(z-x^2)p_X(x)dx$$

$$x=\sqrt{z}$$

$$\left|(z-x^2)'\right|=|-2x|=2\sqrt{z}$$

$$p_Z(z)=\frac{p_X(\sqrt{z})}{2\sqrt{z}}=\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{z}{2}\right)\qquad(z\ge 0)$$

(b)

$Z_1=X^2$、$Z_2=Y^2$ とし、(a)の結果から Z_1、Z_2 の確率密度関数は下のようになる。しかも、X、Y が独立であるから、Z_1、Z_2 も独立な確率変数である。

$$p_{Z_1}(z)=p_{Z_2}(z)=p_Z(z)$$

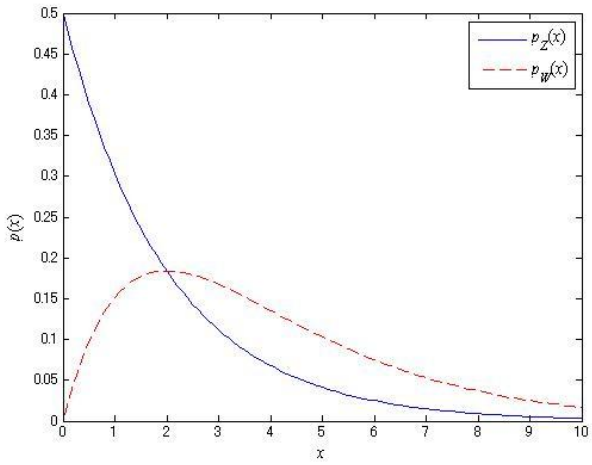
したがって、

$$p_W(w) = \int_0^\infty \int_0^\infty \delta(w - z_1 - z_2)\, p_{Z_1}(z_1)\, p_{Z_2}(z_2)\, dz_1 dz_2$$

$$z_1 = w - z_2 \geq 0$$
$$w \geq z_2$$

$$\begin{aligned} p_W(w) &= \int_0^w p_{Z_1}(w - z_2)\, p_{Z_2}(z_2)\, dz_2 \\ &= \int_0^w \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{(w - z_2)}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{z_2}{2}\right) dz_2 \\ &= \frac{1}{4}\int_0^w \exp\left(-\frac{w}{2}\right) dz_2 = \frac{w}{4}\exp\left(-\frac{w}{2}\right) \end{aligned}$$

$$(w \geq 0)$$



以上