確率変数とは

確率空間（舞台） → 確率変数（主役）

確率変数の特徴

⇒ 確率関数（離散値）　　デジタル

⇒ 確率密度関数（連続値）　アナログ

超関数の復習

力学系 → 質点（大きさをもたない）

電気系 → 点電荷

$$\delta(x)=0,\quad x\neq 0$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\Delta}^{\Delta}\delta(x)\,dx=1$$

$$\delta(-x)=\delta(x)$$

$$if\ a\geq 0\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)\,dx$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\,dy=\frac{1}{a}\qquad \boxed{\begin{array}{c} y=ax \\ dy=adx \end{array}}$$

$$if\ a<0,\quad \text{let } y=-ax$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)\,dx=\frac{-1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\,dy$$

$$=\frac{-1}{a}\quad\rightarrow\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)\,dx=\frac{1}{|a|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax-b)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left[a\left(x-\tfrac{b}{a}\right)\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)\,dx$$

$$=\frac{1}{|a|}$$

通常の関数 $f(x)$ に対して $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f(x))\,dx=\sum_{f(x_i)=0}\frac{1}{|f'(x_i)|}$

$\underset{p(x),x}{\boxed{\text{確率変数}}}$ が $\underset{h(\ )}{\boxed{\text{確定した関数}}}$ の入力とした時の $\underset{y=h(x)}{\underline{\text{出力値}}}$ は $\underset{p_Y(y)}{\underline{\text{確率変数}}}$ となる.

$$p(x)\quad\rightarrow\quad p(y)=?$$

$$p_Y(y)=\int\delta\left(y-\underbrace{h(x)}_{\text{確定した関数}}\right)\underbrace{p_X(x)}_{\text{確率密度関数}}\,dx=\sum_{h(x_i)=y}\frac{p_X\left(h^{-1}(y)\right)}{\left|h'\left(h^{-1}(y)\right)\right|}$$

例）正規（ガウス）分布

$$\int g(x)\,\delta(x)\,dx = g(0)$$

$$\int g(x)\,\delta(f(x))\,dx = \sum_{f(x_i)=0} \frac{g(x_i)}{|f'(x_i)|}$$

となる

$$\because)\quad I \times I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi e^{-\frac{r^2}{2}}\,r dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-z}\,dz = 2\pi \quad \rightarrow \quad I = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1$$

$$\boxed{x \rightarrow y = x^2 = h(x)}$$

$$p_Y(y) = ?$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\ \underbrace{\left(y - x^2\right)}_{\substack{\downarrow \\ \begin{cases} f(x)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y} \\ f'(x)=-2x \end{cases}}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}$$

cf.【有理関数の展開】

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(x)}{(x-x_1)\cdots(x-x_i)} = \frac{c_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{c_i}{x-x_i}$$

$$c_i = \lim_{x \to x_i} (x - x_i) \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N(x_i)}{D'(x_i)}$$

$(x, y) \rightarrow z = x^2 \times y^2$の確率密度関数

$$p(x, y) = 1 \quad \begin{Bmatrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{Bmatrix} \quad \text{一様分布}$$

$$p(z)=\int_0^1\int_0^1 \underbrace{\delta\left(z-x^2y^2\right)}_{\substack{z-x^2y^2\Rightarrow f(x)=0\\ f'(x)=-2xy^2}} \underbrace{p(x,y)}_{1}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{\left|2\frac{\sqrt{z}}{y}y^2\right|}\,dy$$

$$=\int_{\sqrt{z}}^1 \frac{1}{\left|2\frac{\sqrt{z}}{y}y^2\right|}\,dy=\frac{1}{2\sqrt{z}}\int_{\sqrt{z}}^1\frac{1}{y}\,dy$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{z}}\left(-\ln\sqrt{z}\right)=-\frac{1}{4\sqrt{z}}\ln z$$

$x=\pm\frac{\sqrt{z}}{y}$　$\frac{\sqrt{z}}{y}<1\rightarrow\sqrt{z}<y$　y の積分範囲

例）$Z=X+Y$:MRC合成

$$p_X(x)=\frac{1}{\Gamma}e^{-\frac{x}{\Gamma}}$$

$$p_Y(y)=\frac{1}{\Gamma}e^{-\frac{y}{\Gamma}}$$

$$p_Z(z)=\int_0^\infty\int_0^\infty \underbrace{\delta\left(z-x-y\right)}_{\substack{z-x-y=0\\ (z-x-y)=1}} \underbrace{\Rightarrow\ \underline{x-z-y\geq 0}}_{z\geq y} \underbrace{p(x,y)}_{p(x)p(y)}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^z \frac{1}{\Gamma}e^{-\frac{z-y}{\Gamma}}\frac{1}{\Gamma}e^{-\frac{y}{\Gamma}}\,dy$$

$$=\int_0^z \frac{1}{\Gamma^2}e^{-\frac{z}{\Gamma}}\,dy=\underline{\frac{z}{\Gamma^2}e^{-\frac{z}{\Gamma}}}$$

$p_e=\frac{1}{2}e^{-x}$:BPSK差動検波のビット誤り率　x :SNR

$$\overline{P_e}=\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-x}\,p(x)\,dx$$

:平均ビット誤り率

$$=\frac{1}{2(\Gamma+1)}$$

$$\overline{p_e}=\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-x}\frac{z}{\Gamma^2}e^{-\frac{z}{\Gamma}}\,dz$$

$=\frac{1}{2(\Gamma+1)^2}$:2ブランチMRC合成語の平均ビット誤り率

【2つの確率変数の関係】

$p(x, y)$：同時確率（密度）関数

↓

$p(x), p(y)$：周辺確率（密度）関数

$$p(x) = \int p(x, y)\, dy$$

$$p(y) = \int p(x, y)\, dx$$

【条件付き確率】

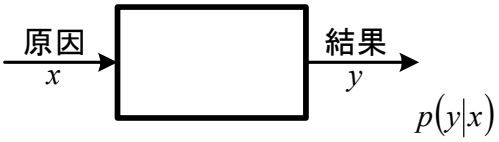
$p(y|x)$：（X を x とした時の y の確率分布）

$$p(x, y) = p(x) \cdot p(y|x) = p(y)\, p(x|y)$$

特に x, y が独立な時 $\left(p(y|x) = p(y)\right)$

$$= p(x) \cdot p(y)$$

$$\Rightarrow \quad p(x|y) = p(y|x) \frac{p(x)}{p(y)}$$ （Bayesの公式）



【相関】

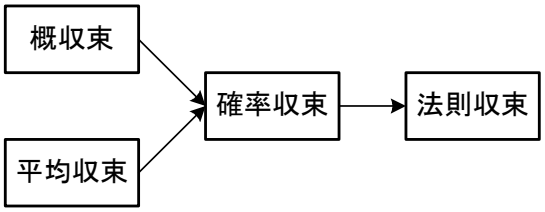
2つの確率変数が独立ならば
相関 → 0

特にガウス分布の場合
独立 ⇔ 相関 ＝0

$$\begin{aligned} R_{XY} &= \overline{\left(X - \overline{X}\right)\left(Y - \overline{Y}\right)} \\ &= \iint \left(x - \bar{x}\right)\left(y - \bar{y}\right) p(x, y)\, dx\, dy \\ &= \iint \left(x - \bar{x}\right)\left(y - \bar{y}\right) p(x)\, p(y)\, dx\, dy \\ &= \int \left(x - \bar{x}\right) p(x)\, dx \int \left(y - \bar{y}\right) p(y)\, dy \\ &= \left(\bar{x} - \bar{x}\right)\left(\bar{y} - \bar{y}\right) = 0 \end{aligned}$$

【確率変数の収束】

収束の階層



リーマン積分（今迄の積分）

↓

ルベーグ積分（確率計算に適した積分）