

5 累乗と累乗根

z^n 、 n は正の整数、は z に z を $n-1$ 回掛け合わせて得る。しかし極形式ではもっと簡単に得られる。すなわち

$$(5.1) \quad z^n = (re^{j\theta})^n = r^n e^{jn\theta}$$

注意しなければならないこと： 2π の整数倍を偏角に加えても複素数 z は変化しないこと。なぜなら

$$(5.2) \quad z = r(\cos \theta + j \sin \theta) = r(\cos(\theta + 2k\pi) + j \sin(\theta + 2k\pi)) = re^{j(\theta + 2k\pi)}$$

であるから。ここに k は任意の整数である。複素数 z を極形式で一般的に表すにはこの形にする必要がある。

累乗根 $z^{1/n}$ 、 n は正の整数、とは、これの n 乗が z になる数である。一般形、式 (5.2) を用いて

$$(5.3) \quad z^{1/n} = (re^{j(\theta + 2k\pi)})^{1/n} = r^{1/n} e^{j\frac{\theta + 2k\pi}{n}} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$k=0, 1, 2, \dots, n-1$ とすることで $z^{1/n}$ の n 個の異なる値を得る (異なる値はこれだけ。 $k=n$ は $k=0$ と同じ値になる。 $k=n+1$ は $k=1$ と同じ値になる。 $\dots$)。ここに $r^{1/n}$ は正の実数 r の正の累乗根である。このことから次の方程式を解くことができる。

$$(5.4) \quad \omega^n = 1$$

これを解くと

$$(5.5) \quad \omega = 1^{1/n}$$

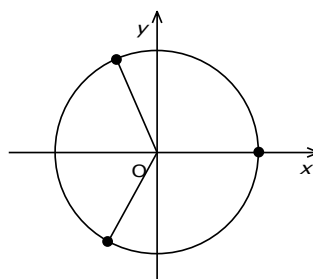
ここで 1 を複素数の一般形式で表すと

$$(5.6) \quad 1 = e^{j(0 + 2k\pi)}$$

したがって

$$(5.7) \quad 1^{1/n} = e^{j\frac{2k\pi}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + j \sin \frac{2k\pi}{n}$$

ここに $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ である。根は図のように単位円の円周を等分割する点である。



#数年前に話題になった映画「博士の愛した数式」で紹介された式は

$$-1 = e^{j\pi}$$

でした。

e (自然対数の底)、 j (虚数単位)、 π (円周率) という出自の全く異なる 3 つの数が絶妙の組み合わせで -1 という簡単な数を表現していることに博士ならずとも感動を覚えます。

#正 5 角形は定規とコンパスだけで作図できます。このことを複素平面と方程式を使って証明してみます。

ω を 1 の 5 乗根とすると、複素平面上の 5 角形の頂点は $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ となります。

つまり5頂点は5次方程式 $x^5 - 1 = 0$ の5個の根に対応します。特に $x=1$ 以外の根は4次方程式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ の根です。この方程式を変形すると $x^2 + x + 1 + x^{-1} + x^{-2} = 0$ となります。さらに $y = x + 1/x$ とおくと $y^2 = x^2 + 2 + x^{-2}$ ですので $y^2 + y - 1 = 0$ となります。この2次方程式の根は $y = (-1 \pm \sqrt{5})/2$ です。

こうして ω の実部 $\cos(2\pi/5) = (-1 + \sqrt{5})/4$ ω^2 の実部 $\cos(4\pi/5) = (-1 - \sqrt{5})/4$ となります。

$\sqrt{5}$ は2辺の長さが1と2の直角3角形の斜辺の長さですから（ピタゴラスの定理）定規で作図できます。

以上の議論で単位円周上の5頂点が全て定規とコンパスで作図できることになります。

複素数の変数 z に対して、複素数値の関数 $f(z)$ が定義できます。これを複素関数と言います。

複素数の意味での微分も重要な概念です。複素関数の実部関数、虚部関数を $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$ とすると複素数の意味で微分できるとは

$$\partial u(x, y)/\partial x = \partial v(x, y)/\partial y \quad \partial u(x, y)/\partial y = -\partial v(x, y)/\partial x$$

を意味します。これはコーシー・リーマンの関係と呼ばれます。

実は静電気の電位分布と複素関数とが密接に関係しています。

複素数における積分も境界値問題に関連して重要な話題です。実績分が複素積分を使うと簡単に計算されます。

電気回路の応答を調べる方法にラプラス変換という手法がありますが、ここでも複素関数や複素積分が重要な役割を果たします。それらの話題は専門課程に進んでから学習することになるでしょう。

6 演習問題

1 互いに複素共役な複素数の和が実数になること、差が純虚数になること、そして積が実数になることを証明せよ。商が実数になる条件を示せ。

2 複素数 z を極形式 $re^{j\theta}$ で表すとき $r = \sqrt{zz^*}$, $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}[z]}{\text{Re}[z]} \right)$ で計算できることを示せ。

3 $z^5 = 2 + 4j$ の根をすべて求めよ。それらを複素平面上にプロットせよ。
 $20^{1/10} \sim 1.35$, $\tan 1.11 \sim 2$ を用いよ。

4 -1 の3乗根をすべて求めよ。それらを複素平面上にプロットせよ。

5 $e^{\pi j} = -1$ が成り立つことを示せ。 $e^{\pi j/2} = j$ が成り立つことを示せ。

6 $e^{1+j} = a + jb$ のとき、実数 a, b を求めよ。

7 $|e^z| = e^x$ $|e^{j\theta}| = 1$ であることを示せ。ただし $z = x + jy$ 、 θ は実数である。

6 演習解答

1 x, y を実数として $z = x + jy$ とすると $\bar{z} = x - jy$ であるから、 $z + \bar{z} = 2x$ となり和は実数。 $z - \bar{z} = 2jy$

となり差は純虚数になる。 $zz^* = x^2 + y^2$ となるから積は実数になる。

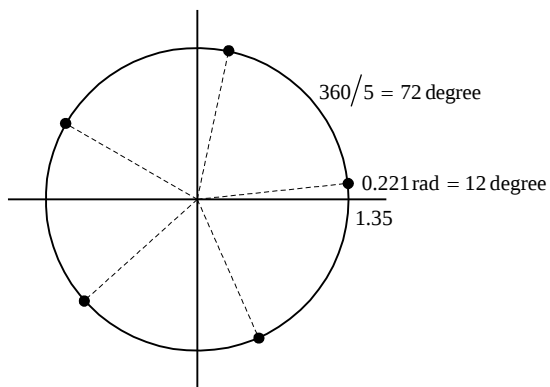
$$\frac{z}{z} = \frac{(x+jy)(x+jy)}{(x-jy)(x+jy)} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + j \frac{2xy}{x^2+y^2} \text{ であるから商が実数になるのは } xy=0 \text{ のとき、すなわち } z \text{ が実}$$

数もしくは純虚数のときである。商が定義されているので $x=y=0$ は除く。

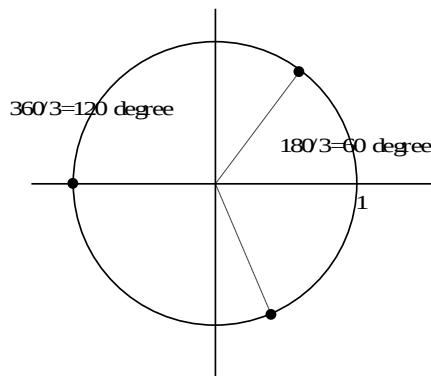
$$2 \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}[z]}{\text{Re}[z]} \right)$$

$$3 \quad 2+4j = \sqrt{2^2+4^2} e^{j \tan^{-1} \left(\frac{4}{2} \right) + j2k\pi} = 20^{1/2} e^{j \tan^{-1} 2 + j2k\pi} \text{ であるから}$$

$$z = \left(20^{1/2} e^{j \tan^{-1} 2 + j2k\pi} \right)^{1/5} = 20^{1/10} e^{j \frac{\tan^{-1} 2}{5} + jk \frac{2\pi}{5}} = 1.35 e^{j0.221 + jk \frac{2\pi}{5}} \quad k=0,1,2,3,4$$



$$4 \quad -1 = 1e^{j\pi + j2k\pi} \text{ であるから } z = 1^{1/3} e^{j\frac{\pi}{3} + j\frac{2\pi}{3}k} \quad k=0,1,2$$



$$5 \quad e^{\pi j} = \cos \pi + j \sin \pi = -1$$

$$e^{\pi j/2} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j$$

$$6 \quad e^{1+j} = e e^j = e \cos 1 + j e \sin 1 = a + jb \text{ より、 } a = e \cos 1 \quad b = e \sin 1$$

$$e \sim 2.7 \quad \cos 1 \sim 0.54 \quad \sin 1 \sim 0.84$$

7 まず単位円周上の点であることから原点からの距離は1であり $|e^{j\theta}|=1$ である。これを用いて

$$|e^z| = |e^x| |e^{jy}| = |e^x|$$