４．５運動座標系上の質点の運動

４．５．２　並進運動座標系における速度・加速度

並進運動する座標系で質点の運動を観察する場合を考える。教科書の図 4.33 のように，空間に固定された静止座標系を$0-xyz$，それに対して並進運動する運動座標系を$O'-\xi\eta\varsigma$とする。それぞれの座標系から観測した質点 P の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$とし，また静止座標系から観測した運動座標系の原点$0'$の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_0$とする。ここで位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}_0$は静止座標系の基底ベクトルを使って表されており，位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$は運動座標系の基底ベクトルを使って表されていることに注意する。そして $\boldsymbol{R}$ は運動座標系から静止座標系への変換テンソルとすると，これらの位置ベクトル $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}'$，$\boldsymbol{r}_0$の間には次の関係が成立する。

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}_0 \tag{4.220}$$

式(4.220)を時間 t で微分すると，

$$\frac{dr}{dt}=R\bullet\frac{dr'}{dt}+\frac{dr_0}{dt} \tag{4.221}$$

となる。

★Rはここでは時間の関数ではありませんので，微分項は０になります.

この式の左辺は静止座標系から見た質点 P の速度，すなわち**絶対速度**(absolute velocity)であり，右辺第 1 項は運動系座標から見た質点 P の速度，すなわち**相対速度**(relative velocity)dr'/dtを静止座標系から見た値に換算したものである。また，右辺第 2 項は静止座標系から見た運動座標系の運動速度であり**運搬速度**とよぶ。両辺に左から $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ を掛け，

$$R^{\mathrm{T}}\bullet\frac{dr}{dt}=\frac{dr'}{dt}+R^{\mathrm{T}}\bullet\frac{dr_0}{dt} \tag{4.222}$$

となる。ここで$R^{\mathrm{T}}\bullet dr/dt$は，運動座標系の基底ベクトルを使って表した質点 P の絶対速度であるので，位置ベクトル $\mathbf{r}'$と通常の微分記号d/dtを用いてdr'/dtと表す。また右辺の第 1 項は相対速度そのものであるので，運動座標系上で観測したときの微分であることを明確に示すために，＊印を着けた微分記号$d*/dt$を用いてd^*r'/dtと表す。さらに右辺第 2 項は運搬速度を運動座標系の基底ベクトルを用いて表したものであり，これをvで表す。そうすると式(4.222)は

$$\frac{dr'}{dt}=\frac{d^*r'}{dt}+v \tag{4.223}$$

この式は運動座標系上で表した相対運動と絶対運動の速度の変換式である。　次に，式

(4.223)を再び時間 t で微分すると

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} = \frac{d^{*2} r'}{dt^2} + \dot{v} \tag{4.224}$$

となる。

★この段落の表現，特に $d^* r'/dt$ の表現は，教科書によっていろいろです．*は，相対座標系上での扱いであることに注意しましょう．

となる。この式(4.224)は，運動座標系上で表した相対運動と絶対運動の加速度の変換式である。左辺が質点 P の加速度すなわち**絶対加速度**(absolute acceleration)，右辺第 1 項は質点 P の**相対加速度**(relative acceleration)，右辺第 2 項は**運搬加速度**である。よって，絶対加速度は相対加速度に運搬加速度を加えたものとなる。

４．５．３　回転運動座標系における速度・加速度

（１）**速　度**　原点O′は静止座標系の原点Oと常に一致しているものとする。この場合，運動座標系から静止座標系への変換テンソルが時間の関数であることに注意して $\boldsymbol{R}(t)$と表す。そうすると $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$は

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}(t) \cdot \boldsymbol{r}' \tag{4.225}$$

の式で関係づけられる。

★ここでは，R は時間の関数としていますので，微分して 0 になりません．

式(4.225)を時間で微分すると

$$\frac{dr}{dt} = \dot{R}(t) \bullet r' + R(t) \bullet \frac{dr'}{dt} \tag{4.226}$$

（変形省略，自分でやってみてください．授業では一部やります．）

$$R(t)^{\mathrm{T}} \bullet \frac{dr}{dt} = R(t)^{\mathrm{T}} \bullet (\omega \times r) + \frac{dr'}{dt} = (R(t)^{\mathrm{T}} \bullet \omega \times R(t)^{\mathrm{T}} \bullet r) + \frac{dr'}{dt} = (\omega' \times r') + \frac{dr'}{dt} \tag{4.231}$$

$$\frac{dr'}{dt} = \omega' \times r' + \frac{d^* r'}{dt} \tag{4.232}$$

これが回転運動する運動座標系上で表した相対運動と絶対運動の速度の変換式である。左辺が**絶対速度**，右辺第 1 項が**運搬速度**，右辺第 2 項が**相対速度**である。

ここで相対速度が 0 の場合について考えると，式(4.232)は

$$\frac{dr'}{dt} = \omega' \times r' \tag{4.233}$$

となる．

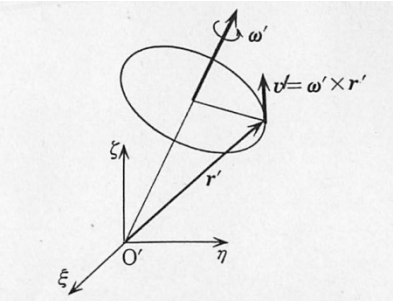

図 4.35　回転速度

（２）加速度

結論だけ述べると，

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} = \frac{d\omega'}{dt} \times r' + \omega' \times (\omega' \times r') + 2\omega' \times \frac{d^* r'}{dt} + \frac{d^{*2} r'}{dt^2} \qquad (4.237)$$

式(4.237)の左辺は**絶対加速度**である。右辺の第 1 項は運動系座標系の回転の加速・減速によって生じる加速度，第 2 項は運動系座標系の回転により生じる向心加速度で，この第 1 項と第 2 項が回転する運動系座標系の**運搬加速度**である。第 3 項は回転する運動系座標系に対して相対運動する物体に働く見かけの加速度であり，コリオリの加速度(Coriolis' acceleration)とよばれる。コリオリの加速度は，式(4.237)より明らかなように物体の進行方向に対して垂直に働く。第 4 項は**相対加速度**である。このように運動系座標系が回転運動する場合の絶対加速度は，運搬加速度・コリオリの加速度・相対加速度の３つの加速度の和として表される。

★コリオリの加速度をマスターしましょう．

４．５．４　運動座標系における運動方程式

運動座標系における運動方程式は，

$$m\frac{d^{*2} r'}{dt^2} = F' - m\left\{\frac{d\omega'}{dt} \times r' + \omega' \times (\omega' \times r') + 2\omega' \times \frac{d^* r'}{dt} + \dot{v}\right\}$$

$$= F' - m\dot{v} - m\frac{d\omega'}{dt} \times r' - m\omega' \times (\omega' \times r') - 2m\omega' \times \frac{d^* r'}{dt} \qquad (4.241)$$

となる。式(4.241)の右辺の第 1 項は上述のように質点に作用する**外力**である。第 2 項は運動系座標系の並進の運搬加速度により生じる見かけの力であり慣性力(inertial force)である。第 3 項は運動系座標系の回転加速度によって生じる慣性力で，第 4 項は回転によって生じる**遠心力**である。第 5 項はコリオリの加速度によって生じる見かけの力で**コ**

リオリの力(Coriolis' force)とよばれる。第 3 項の慣性力，第 4 項の遠心力，第 5 項のコリオリの力は，運動座標系の回転運動により生じる見かけの力であるが，慣性力・遠心力は運動座標系上で静止している物体にも働く力であるのに対して，コリオリの力は相対運動する物体のみに働くという違いがある。

★この運動方程式を理解することで，たとえばロケットの軌跡を解くことができるようになります．以下は，地球上での運動軌跡の話です．

４．５．５　地球上における物体の運動

(1)近似的な運動軌跡

$$v = \omega' \times r_0' \tag{4.242}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega'}{dt} \times r_0' + \omega' \times \dot{r}_0' = \omega' \times (\omega' \times r_0') \tag{4.243}$$

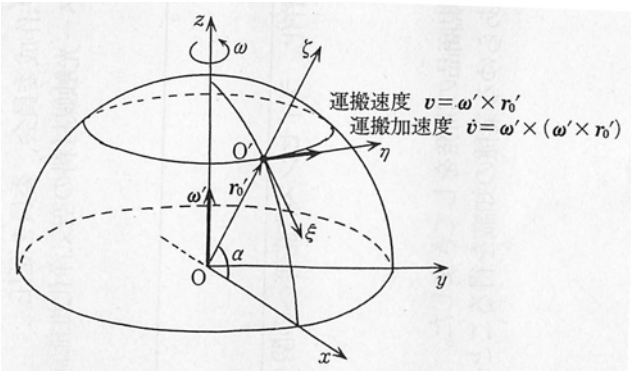

図 4.40　地球上の運動座標系

$$\begin{aligned} m\frac{d^{*2}r'}{dt^2} &= F' - m\dot{v} - m\omega' \times (\omega' \times r') - 2m\omega' \times \frac{d^* r'}{dt} \\ &= F' - m\omega' \times (\omega' \times r_0') - m\omega' \times (\omega' \times r') - 2m\omega' \times \frac{d^* r'}{dt} \\ &= F' - m\omega' \times \{\omega' \times (r_0' + r')\} - 2m\omega' \times \frac{d^* r'}{dt} \end{aligned} \tag{4.244}$$

(2)水平方向の運動

★運動方程式を用いると，地球上で地面と平行に射出した物体の運動を計算できます．北半球では右に曲がるはずです．南半球では？

(3)フーコー振り子

★フーコー振り子（Foucault pendulum）は，国立科学博物館にフーコー振り子があり

ます．機会が有れば見てみましょう．