第３回

光ファイバのモード特性

２００９年１１月２日（月）

第２章

光ファイバのモード特性

２章の内容

１. 構造（ごく簡単に）

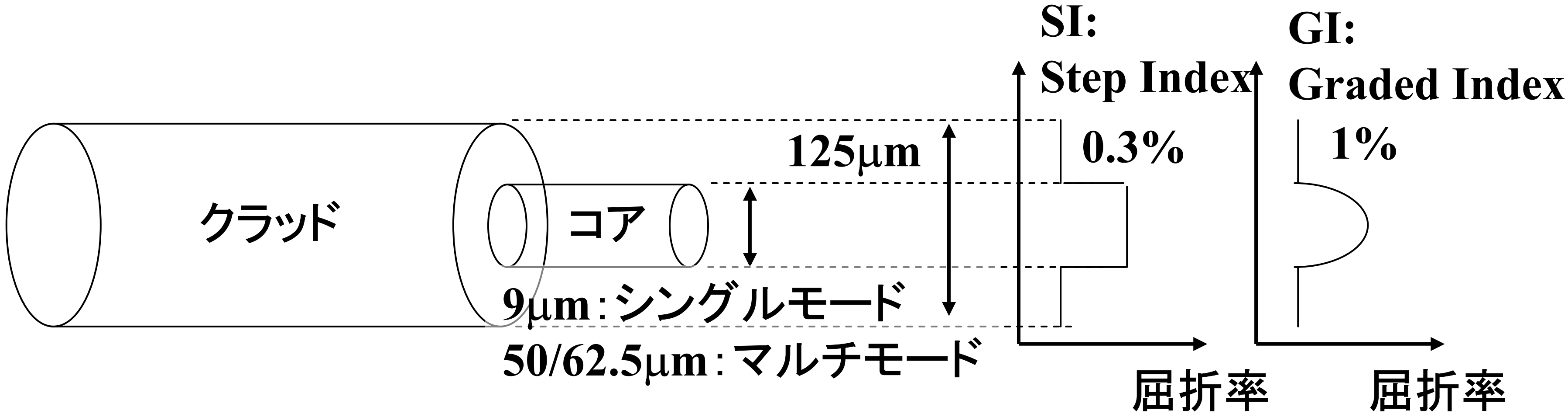
２. 波動方程式の導出

３. 解法（１）：スラブ導波路

４. 解法（２）：光ファイバ

５. 偏波

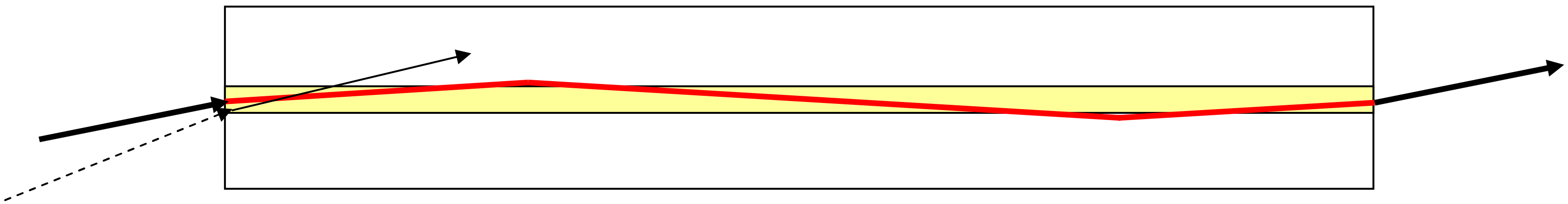
光ファイバケーブル



光ファイバケーブルの写真

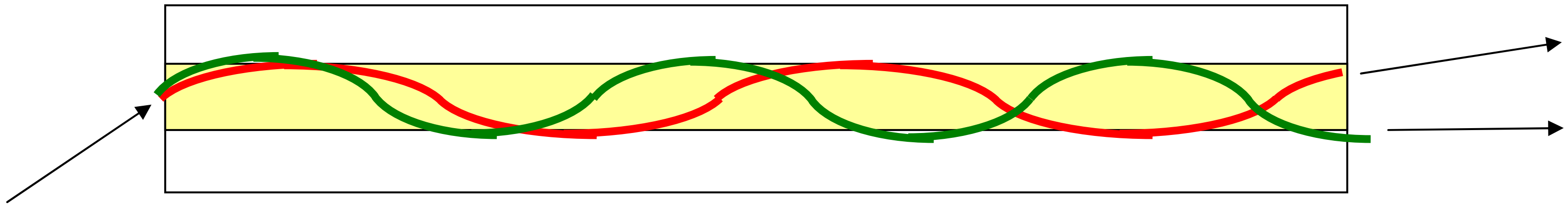
単一モードファイバ･多モードファイバ

単一モードファイバ(コア径約9μm)



・一つの伝送モードのみ → 異なるモード間の時間の影響なし
・長距離伝送向き

多モードファイバ(コア径50/62.5μm)



・複数の伝送モードが許される → 異なるモード間の時間差
・短距離／低コスト用途向き

波動方程式の導出

マクスウェルの方程式(1)

マクスウェルの方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot D = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (3.4)$$

仮定

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon = \varepsilon_0 n_i^2 (i = 1,2) \quad (n_i \text{:屈折率}) \\ &\mu = \mu_0 \quad \text{(非磁性体)} \\ &\sigma = 0 \quad \text{(絶縁体, } J=0\text{)} \end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

電界と磁界の時間依存性

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}^0(x, y, z) e^{j\omega t} \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}^0(x, y, z) e^{j\omega t} \end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

マクスウェルの方程式(2)

式(3.5), (3.6)を式(3.1), (3.2)に代入

$$\nabla \times \boldsymbol{E}^0 = -j\omega\mu_0 \boldsymbol{H}^0 \qquad (3.7)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}^0 = j\omega\varepsilon_0 n_i^2 \boldsymbol{E}^0 \qquad (3.8)$$

電界の式

式(3.7)の両辺に　$\nabla \times$　を作用させると、

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}^0 = -j\omega\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{H}^0 \qquad (3.9)$$

左辺＝ $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}^0) - \nabla^2 \boldsymbol{E}^0$

式(3.3)より $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \nabla \cdot (\varepsilon \boldsymbol{E}) = \varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{E} + (\nabla \varepsilon) \cdot \boldsymbol{E} = 0$　だから、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E}^0 = -\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E}^0$$

（時間項削除）

マクスウェルの方程式(3)

よって左辺$= -\nabla\left(\frac{\nabla {n_i}^2}{{n_i}^2}\cdot E^0\right) - \nabla^2 E^0$

式(3.9)の右辺に式(3.8)を代入すると、

右辺$= -j\omega\mu_0 \cdot j\omega\varepsilon_0 {n_i}^2 E^0 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 {n_i}^2 E^0$

よって、

$$\boxed{\nabla^2 E^0 + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 {n_i}^2 E^0 = -\nabla\left(\frac{\nabla {n_i}^2}{{n_i}^2}\cdot E^0\right)}$$

（波動方程式）
(3.10)

右辺は屈折率の空間依存性の項なので、屈折率の一様な媒質あるいは屈折率差が数%と小さい媒質については $\nabla {n_i}^2 = 0$ より

$$\boxed{\nabla^2 E^0 + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 {n_i}^2 E^0 = 0} \quad (3.11)$$

マクスウェルの方程式(4)

磁界の式

電界の式の導出と同様に式(3.8)の両辺に $\nabla\times$ を作用させると、

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}^{0}=j\omega\varepsilon_0\nabla\times(\boldsymbol{n_i}^2\boldsymbol{E}^{0})$$

$$\text{左辺}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H}^{0})-\nabla^2\boldsymbol{H}^{0}=\nabla\left(\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{B}^{0}}{\mu_0}\right)-\nabla^2\boldsymbol{H}^{0}=-\nabla^2\boldsymbol{H}^{0}$$

($\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ を使用)

$$\text{右辺}=j\omega\varepsilon_0\boldsymbol{n_i}^2(\nabla\times\boldsymbol{E}^{0})+\nabla\boldsymbol{n_i}^2\times j\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}^{0}$$

(ベクトル公式より)

$$=\omega^2\varepsilon_0\mu_0\boldsymbol{n_i}^2\boldsymbol{H}^{0}+\frac{\nabla\boldsymbol{n_i}^2}{\boldsymbol{n_i}^2}\times(\nabla\times\boldsymbol{H}^{0})\cong\omega^2\varepsilon_0\mu_0\boldsymbol{n_i}^2\boldsymbol{H}^{0}$$

よって、

$$\boxed{\nabla^2\boldsymbol{H}^{0}+\omega^2\varepsilon_0\mu_0\boldsymbol{n_i}^2\boldsymbol{H}^{0}=\boldsymbol{0}}\qquad(3.12)$$

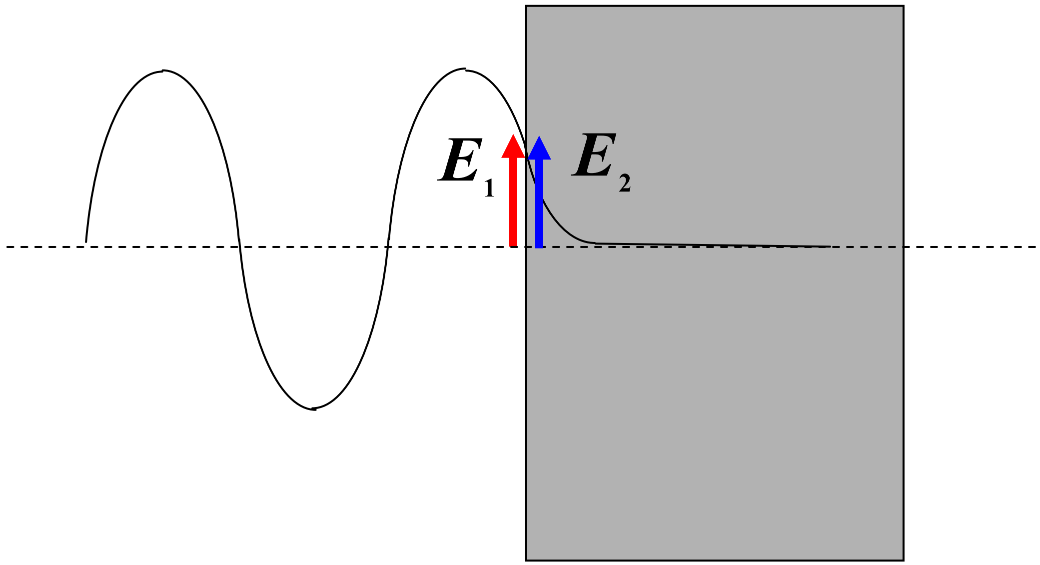
※時間依存の項は場所依存の解に $e^{j\omega t}$ を加えればよい。

解法(1):スラブ導波路

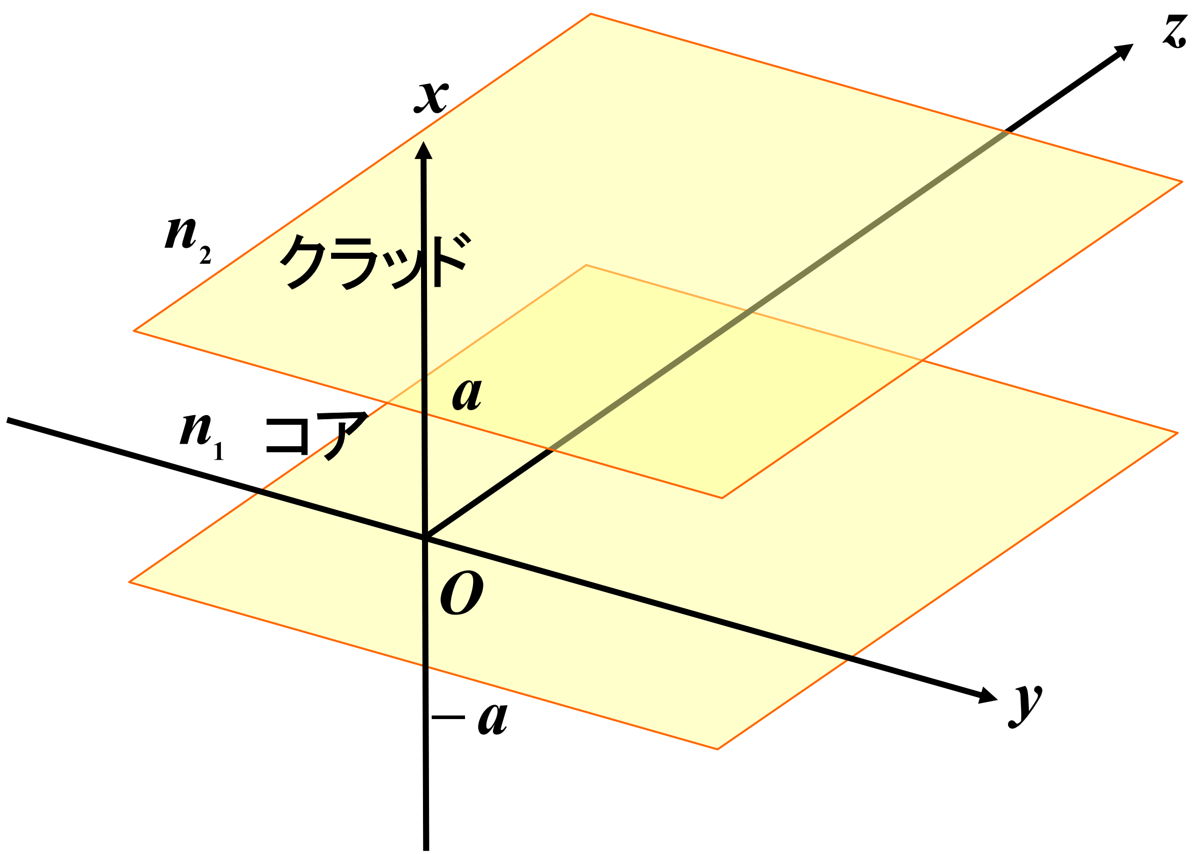
不連続部での境界条件

$\boldsymbol{n}$ を境界面に対する単位法線ベクトルとすると、

$$\begin{cases} (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \times \boldsymbol{n} = 0 & \text{:電界の接線成分が等しい} \\ (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \times \boldsymbol{n} = 0 & \text{:磁界の接線成分が等しい} \end{cases}$$



（例題） ３層スラブ構造（１）



スラブ構造：コアが y 方向、z方向に無限に広がる構造。
x方向にのみ境界が存在。

※コア幅: $2a$ として以下計算していることに注意。
core thickness = $2a$

TEモードとTMモード(1)

伝搬定数をβとおいて電磁界のz方向依存性を$e^{-j\beta z}$と仮定。

$$\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$$

⇨ 最終解は以下の解に$e^{j(\omega t-\beta z)}$を補足したものとなる。

スラブ構造の条件

光はy方向に一様であり、$\frac{\partial}{\partial y} = 0$

⇨ 式(3.7), (3.8)を書き下すと次ページの通り。

$$\nabla \times E^0 = -j\omega\mu_0 H^0 \qquad (3.7)$$

$$\nabla \times H^0 = j\omega\varepsilon_0 n_i^2 E^0 \qquad (3.8)$$

TEモードとTMモード（2）

成分	式(3.7)	式(3.8)
x	$j\beta \boxed{E_y} = -j\omega\mu_0 \boxed{H_x}$	$j\beta H_y = j\omega\mu_0 n_i^2 E_x$
y	$-j\beta E_x - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y$	$-j\beta \boxed{H_x} - \dfrac{\partial \boxed{H_z}}{\partial x} = j\omega\mu_0 n_i^2 \boxed{E_y}$
z	$\dfrac{\partial \boxed{E_y}}{\partial x} = -j\omega\mu_0 \boxed{H_z}$	$\dfrac{\partial H_y}{\partial x} = j\omega\mu_0 n_i^2 E_z$

E_y, H_x, H_zを有する解：$E(0, E_y, 0)$, $H(H_x, 0, H_z)$

TE（Transverse Electric）モード

E_x, E_z, H_yを有する解：$E(E_x, 0, E_z)$, $H(0, H_y, 0)$

TM（Transverse Magnetic）モード

TEモードの解（1）

式(3.11)に$E(0, E_y, 0)$ を代入して、

$$\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}}_{}\right) + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 E_y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta,\quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = (-j\beta)^2 = -\beta^2$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 - \beta^2) E_y = 0 \qquad (3.13)$$

更に $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ とおいてコア内(n=n_1)とクラッド内(n= n_2)について表現すると、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \underbrace{(k_0^2 n_1^2 - \beta^2)}_{>0} E_y = 0 & \text{（コア内）} \quad (3.14) \\ \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \underbrace{(\beta^2 - k_0^2 n_2^2)}_{>0} E_y = 0 & \text{（クラッド内）} \quad (3.15) \end{cases}$$

TEモードの解（2）

式(3.14), (3.15)に電界の接線成分の境界条件を適用する。

$$E_y(x \to \pm a_{+0}) = E_y(x \to \pm a_{-0}) \qquad (3.16)$$

ただし複合同順、a_{+0}, a_{-0}はそれぞれコア側、クラッド側から近づけることを意味する。

磁界の接線成分に対しても同様にして、

$$H_z(x \to \pm a_{+0}) = H_z(x \to \pm a_{-0}) \qquad (3.17)$$

$\dfrac{\partial E_y}{\partial x}$ の連続の式

$\dfrac{\partial E_y}{\partial x}$ continuity

クラッド内では

$$\left.\begin{aligned} E(x \to \pm\infty) &= 0 \\ H(x \to \pm\infty) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.18)$$

の条件が適用される。

TEモードの解（3）

電界について

導波モードは $k_0 n_2 \le \beta \le k_0 n_1$ を満足する。

式(3.14)、(3.15)について以下の変数をおく。

$$\begin{cases} \kappa^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\ \gamma^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(\kappa a)^2 + (\gamma a)^2 = (k_0 a)^2 (n_1^2 - n_2^2) = V^2}$$

半径(V/a)、中心Oのκ-γ座標の円

ただし $$\boxed{V = k_0 n_1 a \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}} = k_0 n_1 a \sqrt{2\Delta}}$$

V:Vパラメータ（規格化周波数）

式(3.14)、(3.15)は以下のように変形される。

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \kappa^2 E_y = 0 \quad \text{（コア内）} \qquad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \gamma^2 E_y = 0 \quad \text{（クラッド内）} \qquad (3.20)$$

TEモードの解(4)

式(3.19)、(3.20)の一般解は以下の式で与えられる。

$$\begin{cases} E_y = Ae^{-j\kappa x} + Be^{j\kappa x} & \text{（コア内）} \quad (3.21) \\ E_y = Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x} & \text{（クラッド内）} \quad (3.22) \end{cases}$$

(3.21) Oscillation

(3.22) Attenuation

まず式(3.18)の条件より、

$$\begin{cases} D = 0 (x > a) & (3.23) \\ C = 0 (x < -a) & (3.24) \end{cases}$$

また式(3.16)より、

$$\begin{cases} Ae^{-j\kappa a} + Be^{j\kappa a} = Ce^{-\gamma a} & (x \to a) \quad (3.25) \\ Ae^{j\kappa a} + Be^{-j\kappa a} = De^{-\gamma a} & (x \to -a) \quad (3.26) \end{cases}$$

TEモードの解（5）

次に $x=\pm a$ において磁界の接線成分H_zが連続である条件(3.17)を用いる。

$$H_z = \frac{j}{\omega\mu_0}\cdot\frac{\partial E_y}{\partial x}$$ だから

$$\begin{cases} \dfrac{dE_y}{dx} = -j\kappa A e^{-j\kappa x} + j\kappa B e^{j\kappa x} & (3.26) \\ \dfrac{dE_y}{dx} = -\gamma C e^{-\gamma x} + \gamma D e^{\gamma x} & (3.27) \end{cases}$$

より、

$$\begin{cases} -j\kappa A e^{-j\kappa a} + j\kappa B e^{j\kappa a} = -\gamma C e^{-\gamma a} & (x=a) \\ -j\kappa A e^{j\kappa a} + j\kappa B e^{-j\kappa a} = \gamma D e^{-\gamma a} & (x=-a) \end{cases}$$

TEモードの解(6)

変形して、

$$\begin{cases} Ae^{-j\kappa a} - Be^{j\kappa a} = -\dfrac{j\gamma C}{\kappa} e^{-\gamma a} & (x = a) \quad (3.28) \\ Ae^{j\kappa a} - Be^{-j\kappa a} = \dfrac{j\gamma D}{\kappa} e^{-\gamma a} & (x = -a) \quad (3.29) \end{cases}$$

AとBの関係を求めるため、CおよびDを消去する。

(3.28)÷(3.25)より、

$$\frac{Ae^{-j\kappa a} - Be^{j\kappa a}}{Ae^{-j\kappa a} + Be^{j\kappa a}} = -\frac{j\gamma}{\kappa} \qquad (3.30)$$

(3.29)÷(3.26)より、

$$\frac{Ae^{j\kappa a} - Be^{-j\kappa a}}{Ae^{j\kappa a} + Be^{-j\kappa a}} = \frac{j\gamma}{\kappa} \qquad (3.31)$$

さらに(3.30)÷(3.31)を計算して右辺の変数を消去

TEモードの解（7）

$$\frac{(Ae^{-j\kappa a}-Be^{j\kappa a})(Ae^{j\kappa a}+Be^{-j\kappa a})}{(Ae^{-j\kappa a}+Be^{j\kappa a})(Ae^{j\kappa a}-Be^{-j\kappa a})}=-1$$

変形して、$A^2=B^2$を得る。

① $A=B$の場合

式(3.25)より $$A(e^{j\kappa a}+e^{-j\kappa a})=Ce^{-\gamma a}$$

$$2A\cos(\kappa a)=Ce^{-\gamma a} \qquad (3.32)$$

式(3.28)より $$A(e^{j\kappa a}-e^{-j\kappa a})=\frac{j\gamma C}{\kappa}e^{-\gamma a}$$

$$2A\sin(\kappa a)=\frac{\gamma C}{\kappa}e^{-\gamma a} \qquad (3.33)$$

(3.33)÷(3.32)より、 $$\boxed{\tan(\kappa a)=\frac{\gamma}{\kappa}=\frac{\gamma a}{\kappa a}} \qquad (3.34)$$

TEモードの偶数次モード

TEモードの解(8)

① $A=-B$の場合

式(3.25)より
$$A(e^{j\kappa a}-e^{-j\kappa a})=-Ce^{-\gamma a}$$
$$2A\sin(\kappa a)=jCe^{-\gamma a} \qquad (3.35)$$

式(3.28)より
$$A(e^{j\kappa a}+e^{-j\kappa a})=jCe^{-\gamma a}$$
$$2A\cos(\kappa a)=-\frac{j\gamma C}{\kappa}e^{-\gamma a} \qquad (3.36)$$

(3.36)÷(3.35)より、
$$\boxed{\cot(\kappa a)=-\frac{\gamma}{\kappa}=-\frac{\gamma a}{\kappa a}} \qquad (3.37)$$

TEモードの奇数次モード

(3.34)と(3.37)を一つの式にまとめると、

$$\gamma=\kappa\tan(\kappa a+\frac{n\pi}{2}) \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$
$$\kappa^2+\gamma^2=(V/a)^2$$
の交点が解

$$\boxed{\tan(\kappa a+\frac{n\pi}{2})=\frac{\gamma a}{\kappa a} \qquad (n=0,1,2,\cdots)} \qquad (3.38)$$

n: 横モードの次数
order of transverse (lateral) mode

対称3層スラブ導波路のモード電磁界式

モード	モード電磁界式 $\lvert x \rvert \le a$	モード電磁界式 $\lvert x \rvert > a$	固有値(分散)方程式
TE偶数次	$E_y = A_e \cos(\kappa x)$	$E_y = A_e \cos(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(\lvert x \rvert - a)}$	$\tan(\kappa a) = \frac{\gamma a}{\kappa a}$
TE奇数次	$E_y = A_o \sin(\kappa x)$	$E_y = \frac{x}{\lvert x \rvert} A_o \sin(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(\lvert x \rvert - a)}$	$\cot(\kappa a) = -\frac{\gamma a}{\kappa a}$
TM偶数次	$H_y = B_e \cos(\kappa x)$	$H_y = B_e \cos(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(\lvert x \rvert - a)}$	$\tan(\kappa a) = \boxed{(\frac{n_1}{n_2})^2} \frac{\gamma a}{\kappa a}$
TM奇数次	$H_y = B_o \sin(\kappa x)$	$H_y = \frac{x}{\lvert x \rvert} B_o \sin(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(\lvert x \rvert - a)}$	$\cot(\kappa a) = -\boxed{(\frac{n_1}{n_2})^2} \frac{\gamma a}{\kappa a}$

複屈折性
birefringence

光導波路の電磁界（３次元の場合）

岡本勝就著『光導波路の基礎』pp.30　図2.11

分散方程式（1）

式(3.38)を規格化した変数で表現する。

⇒ 構造パラメータの変化に対する伝搬定数の変化の特性を一般化できる。

以下の式で**規格化伝搬定数*b***を定義する。

$$\boxed{b = \frac{(\beta / k_0)^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}}$$

$$b = \frac{(\beta^2 - k_0^2 n_2^2)a^2}{(k_0 a)^2 (n_1^2 - n_2^2)} = \frac{(\gamma a)^2}{(\kappa a)^2 + (\gamma a)^2} = \left(\frac{\gamma a}{V}\right)^2 \qquad (3.39)$$

よって、 $\gamma a = V\sqrt{b}$ (3.40)

分散方程式（2）

式(3.39)を変形して、

$$\kappa a = \sqrt{(\frac{1}{b}-1)(\gamma a)^2} = V\sqrt{1-b} \qquad (3.41)$$

(3.40), (3.41)を(3.38)に代入して変形し、以下の式を得る。

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-b}}\{\tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{1-b}} + \frac{n\pi}{2}\} \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \quad (3.42)$$

TEモードの
分散方程式

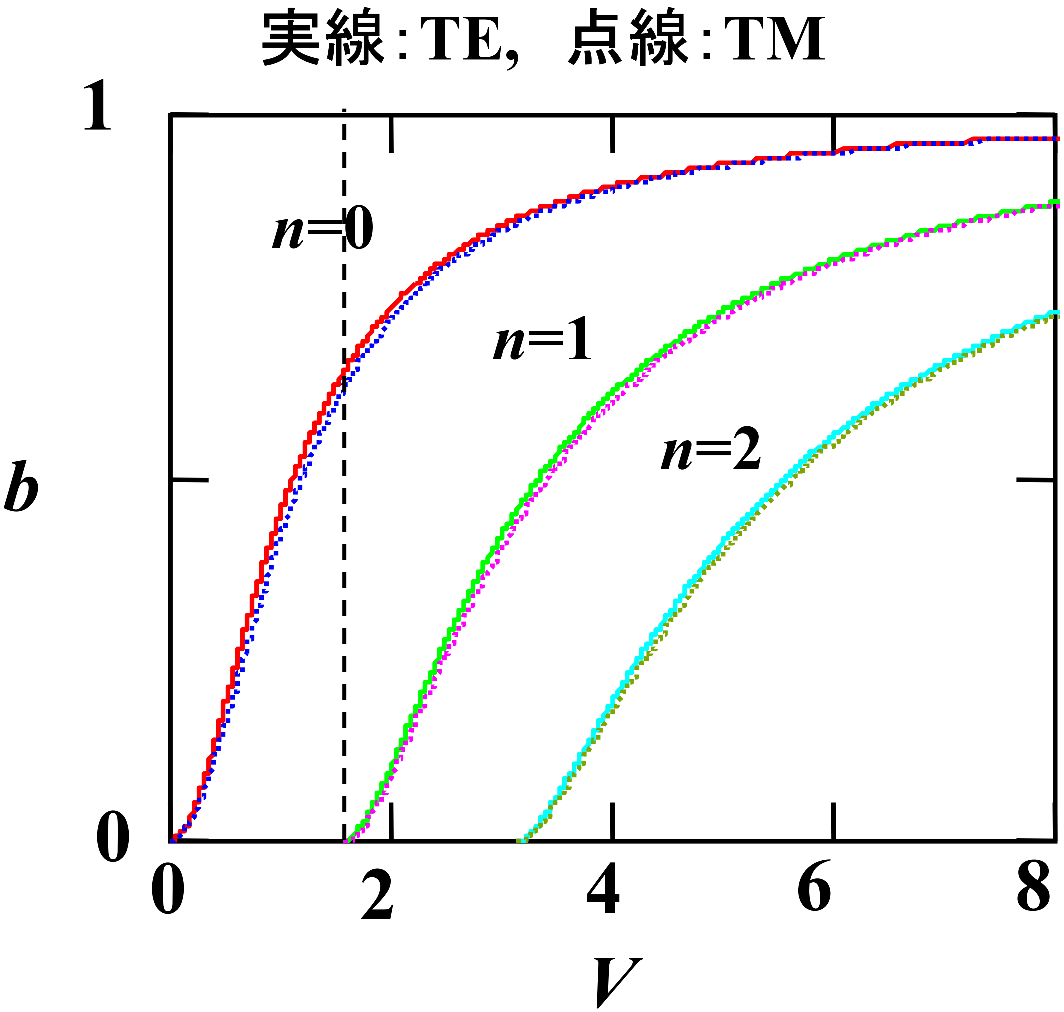
TMモードについても同様にして以下の式を得ることができる。

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-b}}[\tan^{-1}\{(\frac{n_1}{n_2})^2\sqrt{\frac{b}{1-b}}\} + \frac{n\pi}{2}] \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \quad (3.43)$$

TMモードの
分散方程式

分散方程式の数値解析結果

n_1=1.63, n_2=1.45, Δ=0.104の条件の解析結果



●解析方法:
式(3.42), (3.43)を*b*を
パラメータに*V*を求め、
*b*軸-*V*軸を入れ替える。

●ある構造が与えられると
*V*が決まる
→ 横モードごとの*b*が求まる

waveguide parameters
(n_1, n_2, Δ) given
→ *V* decided
→ *b* decided

単一(シングル)モード条件

n=1, b=0のときのVを求めると、分散方程式より、

$$V = \frac{\pi}{2}$$

解析のグラフより、$V < \frac{\pi}{2}$ の範囲ではn=0の解しかないことがわかる。

⇒ **単一(シングル)モード条件**

光ファイバ･光導波路･半導体レーザなど各種デバイスの設計で必須

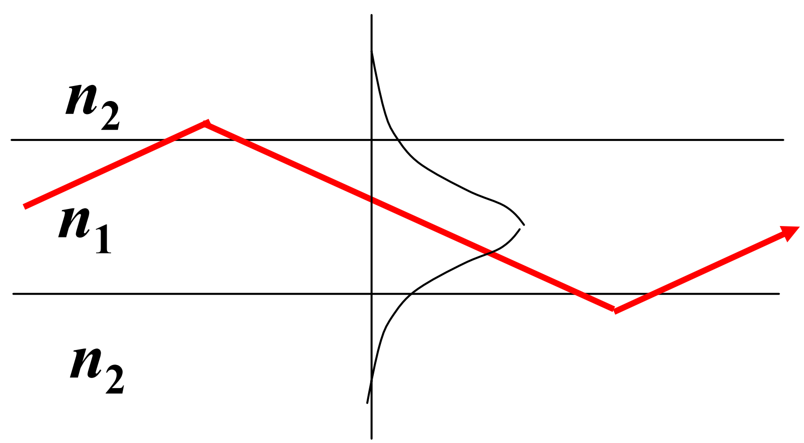
モードの分類(1)

① 導波モード

式(3.13):
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_1{}^2 - \beta^2) E_y = 0 & \text{（コア内）} \\ \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_2{}^2 - \beta^2) E_y = 0 & \text{（クラッド内）} \end{cases}$$

において $k_0 n_2 \le \beta \le k_0 n_1$ の関係を仮定していた。

⇨ 式(3.42), (3.43)で決まる離散的な導波モード

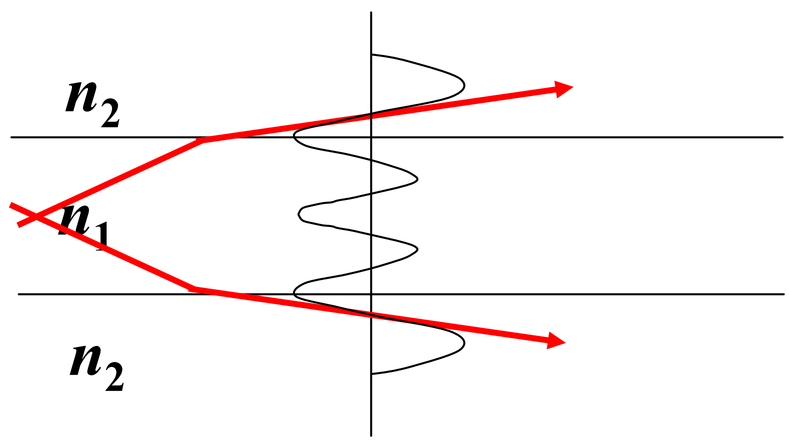


モードの分類（２）

② 放射モード

$\beta \le k_0 n_1$,　　$\beta \le k_0 n_2$　の場合、コア内・クラッド内ともに振動解。

⇒　コア内に閉じ込められず全空間に広がるモード

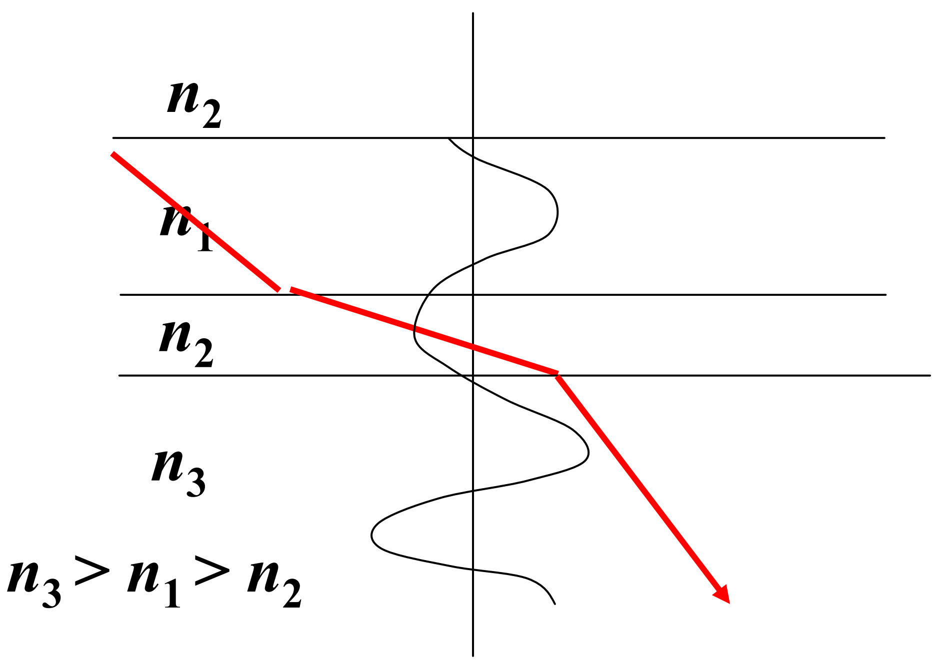


モードの分類(3)

③ 基板放射モード

$\beta > k_0 n_1$,　　$\beta > k_0 n_2$ の場合、コア内・クラッド内ともに減衰解

⇨ 屈折率最大の別の層(基板など)に放射するモード



シュレーディンガーの方程式との類似性

波動方程式　式(3.11)

$$\nabla^2 E^0 + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^{\,2} E^0 = 0$$

シュレーディンガーの方程式（時間無依存）

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2\psi + \frac{2m^*}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0$$

物理的な現象としての差

同じ式の形をしているため、分散方程式(3.42)と同様の解となる。

ただし、ポテンシャル*V*の有無の差がある。

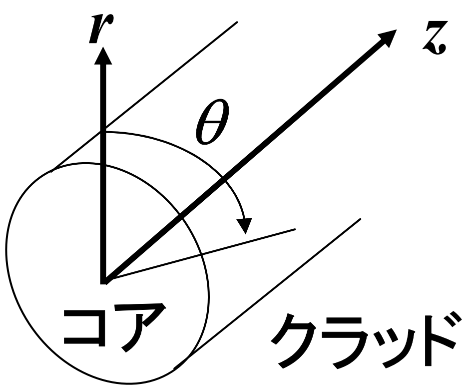
物理的なイメージとしては、
シュレーディンガーの方程式におけるポテンシャル:
電子がコンデンサに蓄積される
マクスウェルの方程式:
光のコンデンサがない（蓄積困難）

解法（2）：光ファイバ

光ファイバのモード（1）

光ファイバの波動方程式

界分布のz方向依存性をexp(-jβz)と仮定して、円筒座標系で以下の式を得る。



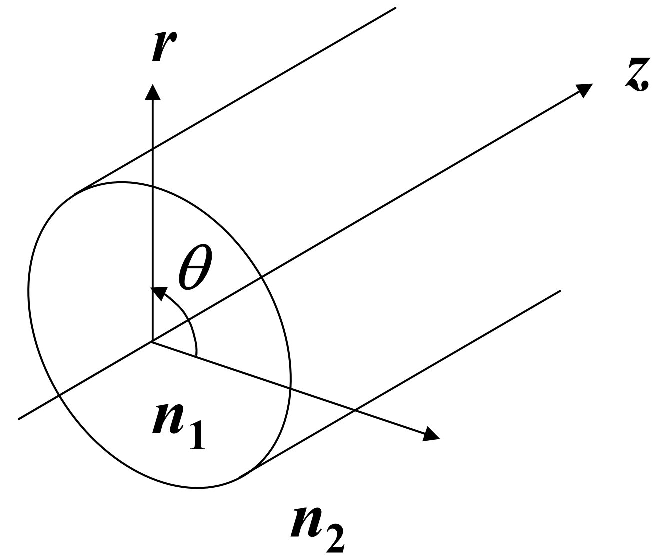
$$
\text{屈折率分布}\,n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 & (r \le a) \\ n_2^2 = n_1^2(1 - 2\Delta) & (r > a) \end{cases} \qquad (3.44)
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial E_z}{\partial \theta} + (k_0^2 n^2 - \beta^2)E_z = 0 \\
\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial H_z}{\partial \theta} + (k_0^2 n^2 - \beta^2)H_z = 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (3.45)
$$

備考：直角座標系から円筒座標系への座標変換（1）

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad z = z$$

である。



$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

備考：直交座標系から円筒座標系への座標変換（2）

逆行列を求めると、

$$\det\left\|\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right\|$$

$$=\cos\theta\cdot\det\left\|\begin{bmatrix}r\cos\theta & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\|-\sin\theta\cdot\det\left\|\begin{bmatrix}-r\sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\|+0\cdot\det\left\|\begin{bmatrix}-r\sin\theta & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\|$$

$$=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

よって

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\frac{1}{r}\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

備考:直交座標系から円筒座標系への座標変換(3)

$$\therefore \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\dfrac{1}{r}\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \dfrac{1}{r}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\sin\theta \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\cos\theta \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ z = z \end{cases}$$

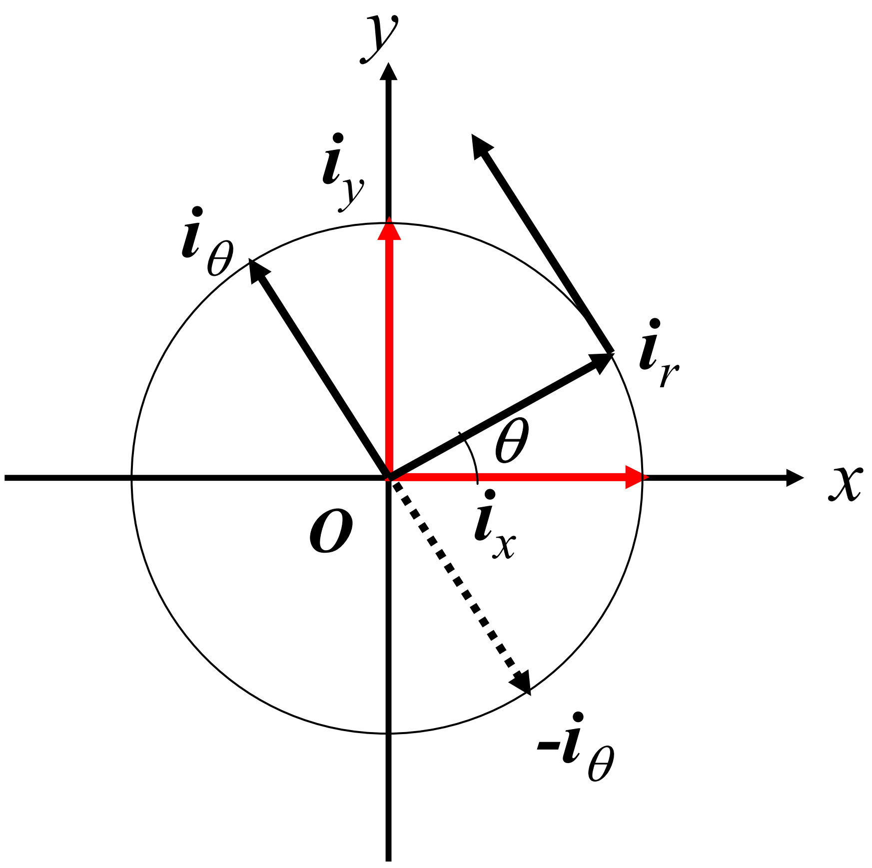
備考：直交座標系から円筒座標系への座標変換（4）

またベクトルについては、

$$\boldsymbol{i}_x = \boldsymbol{i}_r \cos\theta - \boldsymbol{i}_\theta \sin\theta$$

$$\boldsymbol{i}_y = \boldsymbol{i}_r \sin\theta + \boldsymbol{i}_\theta \cos\theta$$

$$\boldsymbol{i}_z = \boldsymbol{i}_z$$



よって勾配∇の座標変換は以下の通りになる。

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{i}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{i}_z$$

$$= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(\boldsymbol{i}_r\cos\theta - \boldsymbol{i}_\theta\sin\theta) + \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(\boldsymbol{i}_r\sin\theta + \boldsymbol{i}_\theta\cos\theta) + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{i}_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{i}_z$$

備考：直交座標系から円筒座標系への座標変換（5）

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\cdot\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\cdot\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$+ \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

備考:直交座標系から円筒座標系への座標変換(6)

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

コアとクラッドの境界条件はそれぞれの領域での電界成分・磁界成分の接線成分が等しいことで立てる。

接線成分はθ, z成分の2成分存在するが、まずz方向について求めていく。

式(3.11)(3.12)をそれぞれ電界・磁界のz方向成分で記述すると以下のようになる。

$$\frac{\partial {E_z}^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial {E_z}^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial {E_z}^2}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 {n_i}^2 E_z = 0$$

$$\frac{\partial {H_z}^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial {H_z}^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial {H_z}^2}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 {n_i}^2 H_z = 0$$

備考：直交座標系から円筒座標系への座標変換（7）

界分布のz方向依存性を $e^{-j\beta z}$ と仮定して、

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 z} = -\beta^2$$

また

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

だから、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + (k_0{}^2 n_i{}^2 - \beta^2)E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + (k_0{}^2 n_i{}^2 - \beta^2)H_z = 0$$

よって式(3.45)が導出された。

式(3.45)の変形（１）

いまE$_z$についてr成分とθ成分に変数分離を行い、

$$E_z = R(r)\Theta(\theta)$$

とおいて式(3.45)に代入する。

$$\frac{d^2R}{dr^2}\Theta + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\Theta + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}R + (k_0{}^2 n_i{}^2 - \beta^2)R\Theta = 0$$

両辺を $R\Theta$ で割って左辺をrを含む式の辺、右辺をrを含まない式とする。

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{dR}{dr} + (k_0{}^2 n_i{}^2 - \beta^2) = -\frac{1}{\Theta}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}$$

$$\frac{1}{R}r^2\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{R}r\frac{dR}{dr} + (k_0{}^2 n_i{}^2 - \beta^2)r^2 = -\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}$$

式(3.45)の変形（２）

左辺においてr = 一定とすると左辺=定数となるので、右辺も定数となる。

この値（分離定数）を l^2 とおくと、右辺から

$$-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = l^2$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + l^2\Theta = 0$$

よって

$$\Theta(\theta) = \cos(l\theta + \varphi)$$

とおける（ $\Theta(\theta) = Ae^{jl\theta} + Be^{-jl\theta}$ ともおけるが、ここでは

わかりやすさを考えて三角関数で表現した）。

式(3.45)の変形（３）

一方、左辺については

$$\frac{1}{R}r^2\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{R}r\frac{dR}{dr}+(k_0{}^2n_i{}^2-\beta^2)r^2=l^2$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left[(k_0{}^2n_i{}^2-\beta^2)-\frac{l^2}{r^2}\right]R=0 \qquad (A.1)$$

コア内($n_i=n_1$)においては $k_0n_1>\beta$である。

$k_0{}^2n_1{}^2-\beta^2=\kappa^2$ とおき、$x=\kappa r$ の変数変換を行うと、

式(A.1)は以下のように変形できる。

$$\frac{d}{dr}=\frac{dx}{dr}\frac{d}{dx}=\kappa\frac{d}{dx}, \qquad \frac{d^2}{dr^2}=\frac{d}{dr}\left(\kappa\frac{d}{dx}\right)=\frac{dx}{dr}\frac{d}{dx}\left(\kappa\frac{d}{dx}\right)=\kappa^2\frac{d^2}{dx^2}$$

式(3.45)の変形（4）

$$\kappa^2 \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{\kappa}{x}\kappa\frac{dR}{dx} + \left[\kappa^2 - \frac{\kappa^2 l^2}{x^2}\right]R = 0$$

$$\therefore \frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left[1 - \frac{l^2}{x^2}\right]R = 0 \qquad (A.2)$$

式(A.2)はベッセルの微分方程式（変数は $x = \kappa r$ ）であり、
基本解は第一種ベッセル関数と第二種ベッセル関数であることがわかる。

一方クラッド内では($n_i = n_2$)においては $k_0 n_2 < \beta$ である。

式(A.2)は

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \left[(\beta^2 - k_0{}^2 n_2{}^2) + \frac{l^2}{r^2}\right]R = 0$$

式(3.45)の変形（5）

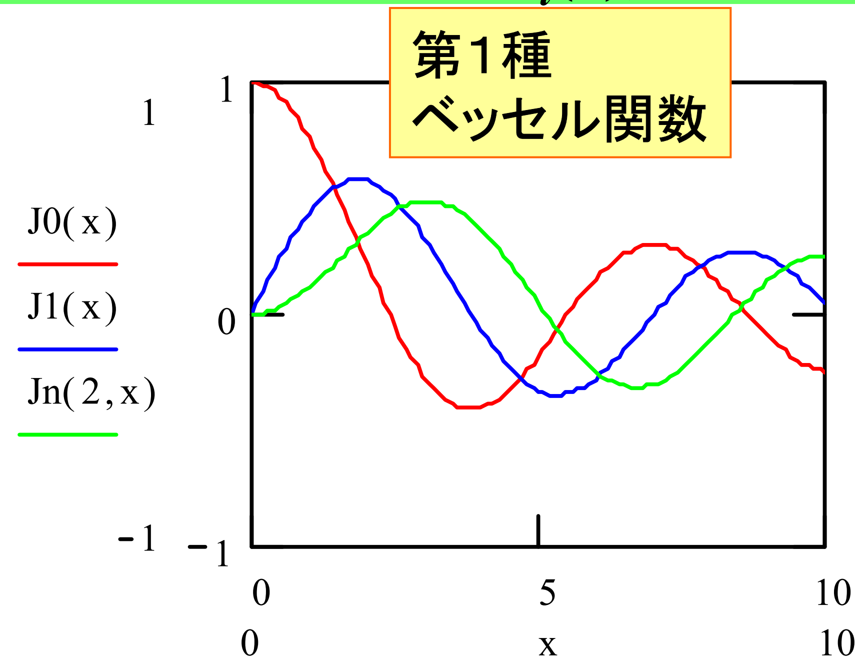
$\beta^2 - k_0{}^2 n_2{}^2 = \gamma^2$　とおき、$x = \gamma r$ の変数変換を行うと前述と同様にして、

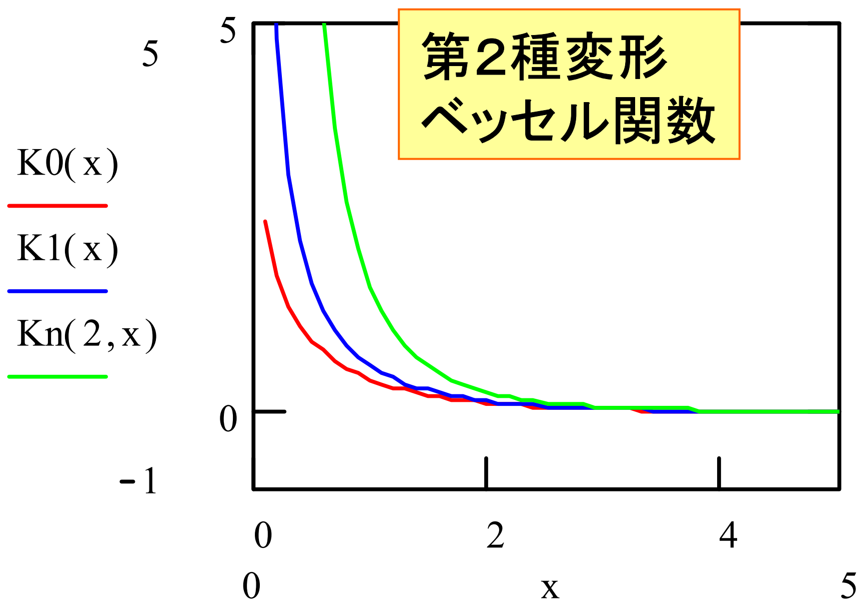
$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} - \left[1 + \frac{l^2}{x^2}\right]R = 0 \qquad (A.3)$$

よって式(A.3)はベッセルの微分方程式（変数は $x = \gamma r$ ）であり、

基本解は変形第一種ベッセル関数と変形第二種ベッセル関数であることがわかる。

光ファイバのモード（３）
第１種ベッセル関数$J_l(x)$, 第２種変形ベッセル関数$K_l(x)$





光ファイバのモード(2)

式(3.44)を(3.45)に代入

⇒ 変数分離法により角度θ依存性は三角関数

半径r依存性はコア内振動解:第1種ベッセル関数$J_\nu(x)$

クラッド内は減衰解:

第2種変形ベッセル関数$K_\nu(x)$

コア内 $(r \leq a)$

$$Ez = A_l J_l(\kappa r)\cos(l\theta + \phi_l) \qquad (3.46)$$

$$Hz = B_l J_l(\kappa r)\cos(l\theta + \psi_l) \qquad (3.47)$$

クラッド内 $(r > a)$

$$Ez = A_l \frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)} K_l(\gamma r)\cos(l\theta + \phi_l) \qquad (3.48)$$

$$Hz = B_l \frac{J_l(\kappa r)}{K_l(\gamma a)} K_l(\gamma r)\cos(l\theta + \psi_l) \qquad (3.49)$$

Ez, Hzがそれぞれ$r=a$において連続となるように係数を考慮

l: 角度θ方向のモード番号

光ファイバのモード(4)

θ方向(接線成分)が$r=a$で連続となる条件

$$E_\theta(r \to a+0) = E_\theta(r \to a-0) \qquad (3.50)$$

$$H_\theta(r \to a+0) = H_\theta(r \to a-0) \qquad (3.51)$$

ここで式(3.7), (3.8)の円筒座標系の表現から以下の式を得る。

$$E_\theta = \frac{-j}{\omega^2 \varepsilon\mu - \beta^2}\left(\beta \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \omega\mu \frac{\partial Hz}{\partial r}\right) \qquad (3.52)$$

$$H_\theta = \frac{-j}{\omega^2 \varepsilon\mu - \beta^2}\left(\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \beta \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \theta}\right) \qquad (3.53)$$

式(3.50), (3.51)を満たす条件から得られる2元連立同次方程式が恒等的に0でない解を持つことから、次式を得る。

光ファイバのモード(5)

$$\frac{k_0^{\,2}\left[\dfrac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+\dfrac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}\right]\left[n_1^{\,2}\dfrac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+n_2^{\,2}\dfrac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}\right]}{l^2\beta^2\left(\dfrac{1}{(\kappa a)^2}+\dfrac{1}{(\gamma a)^2}\right)^2}$$

$$=-\frac{\sin(l\theta+\phi_l)\sin(l\theta+\psi_l)}{\cos(l\theta+\phi_l)\cos(l\theta+\psi_l)}$$

$$=\frac{\cos(2l\theta+\phi_l+\psi_l)-\cos(\phi_l-\psi_l)}{\cos(2l\theta+\phi_l+\psi_l)+\cos(\phi_l-\psi_l)} \qquad (3.54)$$

式(3.54)は$r=a$の至るところで成立しなければいけないので、θに無依存。

$\cos(\phi_l-\psi_l)=0$ ならば右辺=1

$\therefore \phi_l-\psi_l=\pm\dfrac{\pi}{2}$ ⇒ E_zとH_zの角度依存性はπ/2ずれている=直交

光ファイバのモード（6）

式(3.54)は次式となる。

$$[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}][\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+(1-2\Delta)\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}]$$

$$=(\frac{l\beta}{k_0 n_1})^2(\frac{1}{(\kappa a)^2}+\frac{1}{(\gamma a)^2}) \qquad (3.55)$$

階段屈折率円筒光ファイバの固有値方程式

弱導波近似（Weakly-guiding Approximation）（１）

式(3.55)において

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \cong \frac{n_1 - n_2}{n_1} << 1$$

が成り立つ場合には $\beta \cong k_0 n_1$ と近似して（弱導波近似）、

$$\left[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}\right] = \chi l \left(\frac{1}{(\kappa a)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2}\right) \qquad (3.56)$$

（ただしχ=+1または-1）

ここで以下のベッセル関数の公式を用いる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} &= \frac{J_{l-1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} - \frac{l}{(\kappa a)^2} = -\frac{J_{l+1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{l}{(\kappa a)^2} \\ \frac{K'_l(\gamma a)}{\kappa a K_l(\gamma a)} &= -\frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\kappa a K_l(\gamma a)} - \frac{l}{(\kappa a)^2} = -\frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\kappa a K_l(\gamma a)} + \frac{l}{(\kappa a)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (3.57)$$

弱導波近似（Weakly-guiding Approximation）（２）

χ= -1の場合（HEモード）

$$\frac{J_{l-1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} - \frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \qquad (3.58)$$

χ= +1の場合（EHモード）

$$\frac{J_{l+1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \qquad (3.59)$$

光ファイバのモードの分類（1）

光ファイバの一般解は6つの電磁界（$Er, E\theta, Ez, Hr, H\theta, Hz$）をすべて持ったモードである。

⇒ ハイブリッドモード

① HEモード

$\chi = -1$で$l \geq 1$の場合、モード番号を新たに$\nu = l - 1$と振ると、式(3.58)は以下に変形できる。

$$\frac{J_{\nu-1}(\sqrt{1-b}V)}{J_{\nu}(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_{\nu}(\sqrt{b}V)}{K_{\nu-1}(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}} \qquad (3.60)$$

光ファイバのモードの分類(2)

ただし

$$
\begin{cases}
V = k_0 n_1 a\sqrt{2\Delta} & \text{（Vパラメータ or 規格化周波数）} \\
\Delta = \dfrac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \dfrac{n_1 - n_2}{n_1} & \text{（比屈折率差）} \\
b = \dfrac{(\dfrac{\beta}{k_0})^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} & \text{（規格化伝搬定数）}
\end{cases}
$$

解の固有値*b*を値の大きいものから順に**m = 1, 2, 3,....**と振り、
$HE_{l,m}$モードと呼ぶ。

l : 角度θ方向のモード番号
ν: 角度θ方向の節の数の半分
m : 光強度分布が半径方向でとる極大値の数

光ファイバのモードの分類（３）

② **TEモード、TMモード**

$l=0$の場合（ファイバの回転方向に一様な界分布）、

$$\boxed{\frac{J_0(\sqrt{1-b}V)}{J_1(\sqrt{1-b}V)}\cdot\frac{K_1(\sqrt{b}V)}{K_0(\sqrt{b}V)}=-\sqrt{\frac{b}{1-b}}} \qquad (3.61)$$

式(3.46)〜(3.49)において$\phi_l=\dfrac{\pi}{2}$　とすると$E_z=0$　⇒　**TEモード**

$\phi_l=0$　とすると$H_z=0$　⇒　**TMモード**

光ファイバのモードの分類（４）

③ EHモード

$\chi = +1$で$l \geq 1$の場合、モード番号を新たに$\nu = l + 1$と振ると、式(3.58)は以下に変形できる。

$$\boxed{\frac{J_{\nu-1}(\sqrt{1-b}V)}{J_{\nu}(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_{\nu}(\sqrt{b}V)}{K_{\nu-1}(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}}} \tag{3.62}$$

LPモード（1）

式(3.60)～(3.62)はすべて同じ形である。
方位角θ方向のモード番号lを変換して

$$\nu = \begin{cases} l-1 : HE_{l,m}\text{モード} \\ l+1 : TE_{0,m}, TM_{0,m}, EH_{l,m}\text{モード} \end{cases}$$

とおくと、同じνを持つ$HE_{\nu+1,m}$モードと$EH_{\nu-1,m}$モードは伝搬定数が同じである。

⇒ 縮退

※弱導波路近似により導出されるものなので、厳密解では
若干差あり
Little difference of propagation constant occurs in the actual modes

互いに縮退を起こしている固有関数の線形結合から作った固有モードの
組み合わせにより、直線偏光したモードを作ることができる。

⇒ LP（Linearly Polarized）モード：$LP_{\nu,m}$

LPモード（2）

LPモードと厳密モードの対応

LPモード近似	厳密モード	カットオフV値
$LP_{0,m}$	$HE_{1,m}$	Vc=0 (m=1) J_1(Vc)=0のm-1番目の根（m≥2） ２偏波モードを合わせた２重に縮退
$LP_{1,m}$	$HE_{2,m}$ $TE_{0,m}$ $TM_{0,m}$	Vc=2.4048 (m=1) J_0(Vc)=0のm番目の根（ m≥2 ） ２偏波モードを合わせた４重に縮退 （TE、TMは軸対称のため偏波縮退なし）
$LP_{\nu,m}$ （ν ≥2 ）	$HE_{\nu+1,m}$ $EH_{\nu-1,m}$	$J_{\nu-1}$(Vc)=0のm番目の根 ２偏波モードを合わせた４重に縮退

光ファイバのモード電磁界式（1）

コア内　$(0 \le r \le a)$

$$
\left.
\begin{aligned}
E_r &= -jA\beta \frac{a}{\kappa a}\left[\frac{1-s}{2} J_{l-1}(\kappa r) - \frac{1+s}{2} J_{l+1}(\kappa r)\right]\cos(l\theta + \phi_l) \\
E_\theta &= jA\beta \frac{a}{\kappa a}\left[\frac{1-s}{2} J_{l-1}(\kappa r) + \frac{1+s}{2} J_{l+1}(\kappa r)\right]\sin(l\theta + \phi_l) \\
E_z &= AJ_l(\kappa r)\cos(l\theta + \phi_l) \\
H_r &= -jA\omega\varepsilon_0 n_1{}^2 \frac{a}{\kappa a}\left[\frac{1-s_1}{2} J_{l-1}(\kappa r) + \frac{1+s_1}{2} J_{l+1}(\kappa r)\right]\sin(l\theta + \phi_l) \\
H_\theta &= -jA\omega\varepsilon_0 n_1 \frac{a}{\kappa a}\left[\frac{1-s_1}{2} J_{l-1}(\kappa r) - \frac{1+s_1}{2} J_{l+1}(\kappa r)\right]\cos(l\theta + \phi_l) \\
H_z &= -A\frac{\beta}{\omega\mu_0} sJ_l(\kappa r)\sin(l\theta + \phi_l)
\end{aligned}
\right\} \quad (3.63)
$$

光ファイバのモード電磁界式（2）

クラッド内　$(r > a)$

$$\left.\begin{aligned}
E_r &= -jA\beta\frac{a}{\gamma a}\frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)}\left[\frac{1-s}{2}K_{l-1}(\gamma r)+\frac{1+s}{2}K_{l+1}(\gamma r)\right]\cos(l\theta+\phi_l)\\
E_\theta &= jA\beta\frac{a}{\gamma a}\frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)}\left[\frac{1-s}{2}K_{l-1}(\gamma r)-\frac{1+s}{2}K_{l+1}(\gamma r)\right]\sin(l\theta+\phi_l)\\
E_z &= A\frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)}K_l(\gamma r)\cos(l\theta+\phi_l)\\
H_r &= -jA\omega\varepsilon_0 {n_2}^2\frac{a}{\gamma a}\frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)}\left[\frac{1-s_0}{2}K_{l-1}(\gamma r)-\frac{1+s_0}{2}K_{l+1}(\gamma r)\right]\sin(l\theta+\phi_l)\\
H_\theta &= -jA\omega\varepsilon_0 n_2\frac{a}{\gamma a}\frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)}\left[\frac{1-s_0}{2}K_{l-1}(\gamma r)+\frac{1+s_0}{2}K_{l+1}(\kappa r)\right]\cos(l\theta+\phi_l)\\
H_z &= -A\frac{\beta}{\omega\mu_0}s\frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)}K_l(\gamma r)\sin(l\theta+\phi_l)
\end{aligned}\right\}\quad(3.64)$$

光ファイバのモード電磁界式（３）

ただし

$$s = \frac{l\{(\frac{1}{\kappa a})^2 + (\frac{1}{\gamma a})^2\}}{[\frac{J_l'(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K_l'(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}]}$$

$$s_1 = \frac{\beta^2}{k_0{}^2 n_1{}^2} s$$

$$s_0 = \frac{\beta^2}{k_0{}^2 n_2{}^2} s$$

光ファイバの電磁界（１）

國分泰雄著 『光波工学』 共立出版 pp. 174図6.6より

基本モード（$LP_{0,1}$ or $HE_{1,1}$モード）

実線が電界
破線が磁界

光ファイバの電磁界（2）

國分泰雄著 『光波工学』 共立出版　pp. 176図6.7より

TE0,1モード

TM0,1モード

実線が電界
破線が磁界

光ファイバの電磁界（３）

國分泰雄著 『光波工学』 共立出版 pp. 176図6.7より

HE2,1モード

EH1,1モード

実線が電界
破線が磁界

LPモード

國分泰雄著 『光波工学』 共立出版 pp. 177図6.8より

$TE_{0,1}$と$HE_{2,1}$の線形結合

$TM_{0,1}$と$HE_{2,1}$の線形結合

光ファイバの電磁界（６）

岡本勝就著『光導波路の基礎』pp.63　図3.2

$LP_{0,1}$　$HE_{1,1}$

$TE_{0,1}$

$LP_{1,1}$　$TM_{0,1}$

$HE_{2,1}$

$EH_{1,1}$

$LP_{2,1}$

$HE_{3,1}$

光ファイバの分散曲線（１）

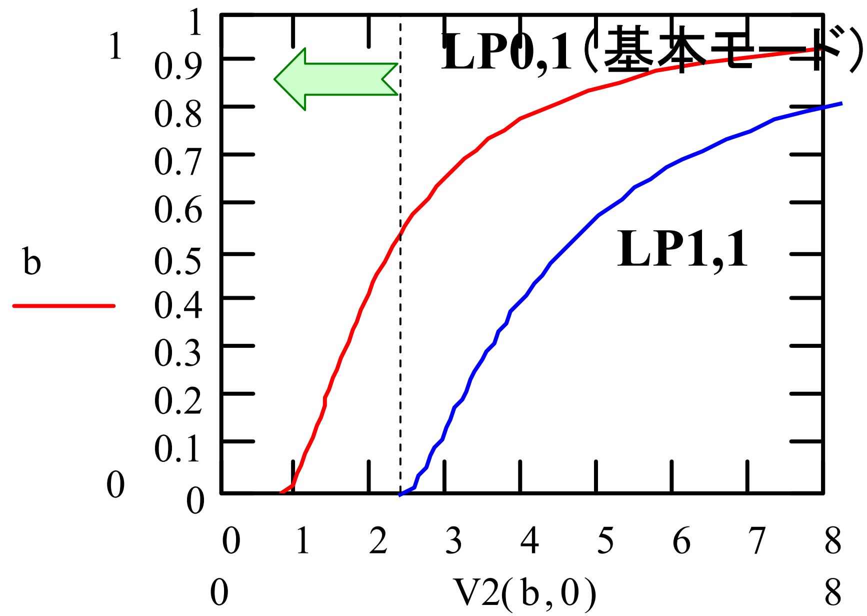
基本モードν=0について考える。式（3.60）にν=0を代入して

$$\frac{J_0(\sqrt{1-b}V)}{J_1(\sqrt{1-b}V)}\cdot\frac{K_1(\sqrt{b}V)}{K_0(\sqrt{b}V)}=-\sqrt{\frac{b}{1-b}}$$

カットオフ条件は、b=0とおいてJ_0(Vc)=0の第一番目の解なので、

$$\boxed{V\leq 2.405}$$

単一モード条件



$V=k_0n_1a\sqrt{2\Delta}$ より

$$a<\frac{2.405}{k_0n_1\sqrt{2\Delta}}$$

$\Delta=0.003,\ n_1=1.46$のとき、

$$a<\frac{2.405\times1.55}{2\pi\times1.46\times\sqrt{2\times0.003}}=5.25\mu m$$

（直径10.5μm以下）

光ファイバの分散曲線（２）

岡本勝就著『光導波路の基礎』pp.66　図3.4