# MAP-MRFに基づく画像処理

## 低次レベル(早期)画像処理

Low Level 処理でよくMRFモデルを利用.

- •画像の復元・再構成
- •エッジ検出
- •テクスチャ分割、ディスパリティ検出

•動的輪郭モデル・オプティカルフローなど

# 画像の尤度情報(観測モデル) 観測 $d = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}, d_i \in D$ : 回素値の配列 d: MRFにおける真の値 f が 変換と画質劣化を受けたもの 線形変換、ガウス性雑音に単純化 $d_i = \varphi(f_i) + e_i$ ; $\varphi()$ は線形変換、 $e_i \approx N(0, \sigma_i^2)$

$$p(d/f) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} \sqrt{2\pi\sigma_{i}^{2}}} e^{-U(d/f)},$$
$$U(d/f) = \sum_{i \in S} (\varphi(f_{i}) - d_{i})^{2} / (2\sigma_{i}^{2}) \quad \text{となる}.$$

# 面の事前情報(区分的一定面) ・複数サイトクリークのポテンシャル $V_{c}(f) = \begin{cases} 0 ; C O 全てのサイトが同一 ラベル \\ -\xi_{c}; それ以外(\xi_{c} < 0) \end{cases}$ 特にペアサイトの場合 $V_{c}(f) = V_{2}(f_{i}, f_{j}) = v_{20}[1 - \delta(f_{i} - f_{j})]$ 単一サイトのクリークポテンシャル $V_1(f_i) = \alpha_l$ , $f_i$ のラベルが l のとき

ペアサイトのみを考慮した場合の事前エネルギーU(f)は,



# 面の事前情報(区分的連続面)

## 通常,ペアサイトクリークポテンシャルのみ を利用.



$$E(f) = U(f/d) \Leftarrow U(d/f) + U(f)$$
  
=  $\sum_{i \in S} (f_i - d_i)^2 / (2\sigma^2) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i} v_{20} (1 - \delta(f_i - f_j))$ 

ラベル集合:離散的⇒組合せ最適化問題 最小解 f\*:最適復元画像 最適化手法:最急降下法, greedy法, BP(Belief Propagation)法など. (Greedy法の例) 初期配置:  $f^0 \in F$ 任意のサイト*i*の新しいラベル $f_i^{(t+1)} \in L_d$ に対し、  $E(f^{(t+1)}) - E(f^{(t)})$ を局所的に最小化. エネルギーが減少しなくなるまで繰り返す。

画像復元問題(区分的連続面)

8

区分的に連続な画像復元では、Lは連続な値をとる



4. 事後エネルギーの計算.  

$$E(f) = U(f/d)$$

$$= \sum_{i \in S} (f_i - d_i)^2 / (2\sigma^2) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i} g(f_i - f_j)$$

事後エネルギーは等価的に次式のように表される。  $E(\boldsymbol{f}) = \sum (f_i - d_i)^2 + \lambda \sum \sum g(f_i - f_i) \quad , \lambda = 2\sigma^2$ i∈S  $i \in S$   $i \in N$ . 2次元の場合, $S = \{(i, j) | 1 \le i, j \le n\},$  $N_{(i,j)} = \{(i-1,j), (i+1,j), (i,j-1), (i,j+1)\}$ とすると、事後エネルギーは、  $E(f) = \sum (f_{i,j} - d_{i,j})^2 + \lambda \sum \sum g(f_{i,j} - f_{k,l})$  $i, j \ (k, l) \in N_{(i, j)}$ 

# 面の再構成問題

# 面の復元の一種であるが, 疎なデータを対象とし、復元と補間の処理から成る.

(例) ステレオ視からの面の再構成.

奥行値の観測モデル

 $d = \{d_i | i \in A\}$ : 有効な奥行値の集合.  $d_i = d(x_i, y_i)$ が  $(x_i, y_i)$ における奥行値を表すとき、観測モデルを  $d(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) + e_i$ と仮定. 誤差  $e_i$ は互いに独立で同一のガウス性の 確率分布.  $f(x_i, y_i)$ は真の奥行値.

## 事前情報として, 滑らかさの項を付与. 2次あるいは高次導関数を含む必要あり. ⇒事前エネルギー: *U*(*f*)

## 2次導関数からなる滑らかさの項の例 $U(f) = \int \{f_{xx}(x, y)^2 + f_{xy}(x, y)^2 + f_{yy}(x, y)^2 \} dxdy$

この項の例は、正則化法(Regularization)における 正則化項に相当。

離散形では、導関数の差分近似によって以下の  
ような事前エネルギーとなる.  
$$U(f) = \sum_{i} \sum_{j} [f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}]^2 + 2\sum_{i} \sum_{j} [f_{i,j} - f_{i-1,j} - f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1}]^2 + \sum_{i} \sum_{j} [f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}]^2$$
事後エネルギーは、
$$E(f) = U(f/d) = \sum_{i \in S} (f_i - d_i)^2 / (2\sigma^2) + U(f)$$

事後エネルギーU(f)を最小化する $f^*$ がMAP解.

# エッジ検出問題

## 濃度変化による非テクスチャ性のエッジが対象. jump edgeやroof edgeなど.

画素の配置は量子化されており、画素の値は雑音の 影響を受ける.(格子状サイト,観測のモデル化)

エッジ検出は画像復元や再構成に類似した問題. → 区分的に連続な復元モデルを参考に、エッジ のラベリングモデルを作成.

# 事後エネルギーを $E(f) = \sum_{i \in S} (f_i - d_i)^2 + \lambda \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_i} g(f_i - f_j)$ と表す. 関数gは、 $\lim_{\eta \to \infty} |g'(\eta)| = C < \infty$ である. $g(\cdot)$ を修正してエッジのマークを可能とする.

もう1つのMRFモデルを導入.

ラインプロセス(line process)

ラベルはエッジの生起を示し、{0,1}のいずれか.

→ 互いに結合した2つの MRFモデルを考える.

### 右図の結合MRF

- ・濃淡値に対する既存格子
- ・エッジ場に対する双対格子 (隣接画素間のエッジ)



m 画素の格子サイト:  $S^{P} = \{i \mid i = 1, \dots m\}$ 双対な格子サイト:  $S^{E} = \{(i, j) \mid i, j \in S^{P}; i \triangleleft \triangleright j\}$ と表現.  $i \triangleleft \triangleright j$ は、 $i \succeq j$ が隣接することを示す.  $f_{i}^{P}, i \in S^{P},$ を濃淡ラベル、  $f_{i,j}^{E}, (i, j) \in S^{E},$ をエッジラベル(Oか1)とする. 2つのMRFの結合: 結合確率 $P(f^{P}, f^{E})$ 、あるいは事前エネルギー  $U(f^{P}, f^{E})$ で表される.

ポテンシャル関数  $g(f_i^P - f_i^P) = \min\{(f_i^P - f_i^P)^2, \alpha\}$ を、濃淡変数とエッジ変数の関数に修正。 $(i \in N_i)$  $g(f_i^P, f_j^P, f_{i,j}^E) = (f_i^P - f_j^P)^2 (1 - f_{i,j}^E) + \alpha f_{i,j}^E, \quad i \triangleleft \triangleright j$ 事前エネルギー $U(f^{P}, f^{E})$ は、  $U(f^{P}, f^{E}) = \sum \sum g(f_{i}^{P}, f_{i}^{P}, f_{i}^{E})$  $i \in S^P$   $i \in N_i$  $= \sum \sum V(f_{i}^{P}, f_{j}^{P} | f_{i,j}^{E}) + \sum \sum V(f_{i,j}^{E})$  $i \in S^P$   $i \in N_i$  $i \in S^P$   $i \in N_i$ 

従って、事後エネルギー $U(f^{P}, f^{E} | d)$ は、  $U(f^{P}, f^{E} | d) = \sum_{i \in S^{P}} (f_{i}^{P} - d_{i})^{2} + \sum_{i \in S^{P}} \sum_{j \in N_{i}} \lambda g(f_{i}^{P}, f_{j}^{P}, f_{i,j}^{E})$  $f^{E}$ は離散,  $f^{P}$ は実数での最小化.(組合せ問題) より単純な実数値最小化問題への変換も可能.  $E(f^{P}) = \sum_{i \in S} (f_{i}^{P} - d_{i})^{2} + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N_{i}} \lambda g(f_{i}^{P} - f_{j}^{P})$  $f^P$ に関する最小化だけで復元画像 $(f^P)^*$ の取得が可能. エッジ場  $f^{E}$ は,  $(f^{P})^{*}$ を閾値処理することで決定.  $f_{i,j}^{E} = \begin{cases} 1 & もし(f_{i}^{P} - f_{j}^{P})^{2} > \alpha \\ 0 & それ以外 \end{cases}$ 

禁止エッジパターンが存在する場合

孤立エッジ 鋭角エッジ 4接合エッジ 構造エッジ

この場合のMAPエッジ検出問題は、

 $(f^{*^{P}}, f^{*^{E}}) = \arg \min_{(f^{P}, f^{E}):U^{E}(f^{E})=0} E(f^{P}, f^{E})$ ここで、:  $U^{E}(f^{E}) = 0$ は、禁止エッジ配置がない という拘束条件. ⇒ 拘束条件下での最小化問題.

→ペナルティ法による最小化



(例) 隣り合う平行な2本のエッジの禁止

 $f^{E} = \{f_{i,j}\}$ を垂直エッジ場 $\{v_{i,j}\}$ と水平エッジ場 $\{h_{i,j}\}$ に分類.  $(i, j) \in S^{E}, f_{i,j}$ として $\{0,1\}$ の1つの値をとる. このとき、水平方向のペナルティとしては $U_{h}(h) = \lambda_{h} \sum_{(i,j)} h_{i,j} h_{i+1,j}, \lambda_{h} > 0$ のように表現可能.  $h_{i,j}, h_{i+1,j}$ が共に1のときペナル

ティが課せられる. 垂直エッジについても同様.

# テクスチャ解析問題

## MRFテクスチャ解析における3項目

- ・テクスチャモデル(Texture Modeling)
- ・テクスチャ分類(Texture Classification)
- ・テクスチャ分割(Texture Segmentation)

# MRFテクスチャモデル

- ・1つのテクスチャ:1つのMRFモデル.
- ・複数テクスチャ画像:複数のMRFモデルを

階層的に使用.

・MRFモデルの例

Auto - Normal, Multi - Level Logistic(MLL)など.

例えば、

MLLモデルではテクスチャパターン f の確率をMLL のクリークポテンシャル関数で定義.

2次の隣接システムでは、10個のクリークが存在.  
(例)ペアクリークポテンシャルのみが0でないとき、  
$$V_2(f_i, f_j) = \begin{cases} \beta_c & \{i, j\} \in C_2 \text{obt} < I \text{blue} \ -\beta_c & \mathcal{E} \ -\beta_c & \mathcal{E} \ \mathcal{E} \end{pmatrix}$$

MLLによる MRFのモデル化:

$$\begin{array}{c} & & \\ & \\ & \\ \hline \\ & \\ \end{array} \end{array} \right\} P(f) = \frac{1}{Z} e^{-U(f)}, \quad U(f) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} V_2(f_i, f_j) \end{array}$$

実際は、分配関数(正規化係数)Zを決定することは難しく、直接的に配置 f の確率P(f)を求めることは困難.



## Gibbs Sampler

Step1. 
$$f の初期化 f_i \in L, f \in L^S$$
  
Step2. for  $i \in S$  do  
2-1)  $p_l = P(f_i = l | f_{N_i})$  for all  $l \in L$  の計算.  
2-2)  $f_i \geq p_l$  の確率でラベル *l*に設定.  
Step3. Step2を *N* 回繰り返す.

条件付生起確率:Gibbs分布から計算  $P(f_i = l \mid f_{N_i}) = \frac{\exp\{\sum_{i' \in N_i} V_2(f_i, f_{i'})\}}{\sum_{f_i \in L} \exp\{\sum_{i' \in N_i} V_2(f_i, f_{i'})\}}$  ルーレット選択によるラベル決定



*U*(0,1)で発生させた乱数 *u<sub>i</sub>*(*i* = 1,…,*N*)に対して以下のように 値を決める。

$$X_{i} = \begin{cases} a & if \quad 0 \le u_{i} \le 0.25 \\ b & if \quad 0.25 < u_{i} \le 0.70 \\ c & if \quad 0.70 < u_{i} \le 1.00 \end{cases}$$

## Metropolis Sampler

$$P(f')/P(f) = \frac{\exp\{-\sum_{i' \in N_i} V_2(l, f_{i'})\}}{\exp\{-\sum_{i' \in N_i} V_2(f_i, f_{i'})\}}$$
$$= \exp\{\sum_{i' \in N_i} V_2(f_i, f_{i'}) - \sum_{i' \in N_i} V_2(l, f_{i'})\}$$

# テクスチャ分割問題

「教師有り…テクスチャパラメータが特定された分割 【教師無し…テクスチャパラメータの推定による分割

テクスチャ分割も事後エネルギーの定式化と最小化に よって行われる

階層的モデルを持つテクスチャのMAP分割

高次レベルでMRFモデルの事前確率P(f)を決定し、  $\Rightarrow$  低次レベルで尤度 $P(d \mid f)$ を決定する。

### 事前確率P(f):

## テクスチャfは,各サイトをラベル集合Lの1つの テクスチャタイプを持つ領域に分割.

尤度:

ラベル集合 $L = \{1, \dots, M\}$ , ある分割 f に対し, ラベルIを 持つサイトの集合を $S^{(I)}(f) = \{i \in S \mid f_i = I\}$ とすると, 尤度ポテンシャル関数U(d/f)は,

$$U(\boldsymbol{d} / \boldsymbol{f}) = \sum_{c \in C} V_c(\boldsymbol{d} / \boldsymbol{f}) = \sum_{I \in L} \sum_{\forall c \subset S^{(I)}} V_c^{(I)}(\boldsymbol{d} / \boldsymbol{f})$$

ただし、 $V_c^{(I)}(d/f)$ はタイプIのラベルを持つc上のdに 対するポテンシャル関数.

タイプIのテクスチャが、MLLのパラメータによって 以下のようにモデル化されていると仮定.  $\theta^{(I)} = \{\alpha^{(I)}, \beta^{(I)}, \cdots\}$ このとき、単一サイトクリークポテンシャルは、  $V_1^{(I)}(\boldsymbol{d}/\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{\alpha}^{(I)}$ マルチサイトクリークポテンシャルは,  $V_2^{(I)}(\boldsymbol{d}/\boldsymbol{f}) = \begin{cases} \beta_c^{(I)} & \text{全ての}d_i, (i \in c) \text{が同じとき} \\ -\beta_c^{(I)} & \text{それ以外} \end{cases}$ 以上より、事後エネルギーU(f/d)は、 U(f/d) = U(f) + U(d/f) $= U(f) + \sum_{I} \{V_{1}^{(I)}(d \mid f) + V_{2}^{(I)}(d \mid f)\}$ と表され、 $f^{*} = \arg\min_{f} U(f \mid d)$ でMAP分割を得る.

#### 主な参考文献

S.Z.Li, Markov Random Field Modeling in Computer Vision, Springer-Verlag, (1995)

田中和之,"確率モデルによる画像処理技術入門",電子情報通信学会基礎・ 境界ソサイエティ主催企画若手研究者学生向けに最新技術をわかりやすく 紹介する講演会「ベイズ統計と統計力学を用いた確率的情報処理技術(2001)