# 画像からの三次元像形成



知的画像処理(8) 3

像形成モデル

#### 3次元空間上の点 *p*(*x*, *y*, *z*) 画像面上の点 *P*(*X*, *Y*)





zを一定と近似可能.→(平行投影)



 $X = c \cdot x$ ,  $Y = c \cdot y$  : cは定数





接ベクトルN  $\mathbf{N} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right) = (p, q, -1)$ 面の向きを表すベクトル 空間上のz = -1の平面を,



と呼ぶ.

勾配空間に接ベクトル Nを

写像した点は、









## Shape-From-Shading

像形成モデルに基づいて1枚の画像から
 3次元形状を推定する方法。
 反射率地図に基づく方法(光源位置が既知)。
 面形状仮説に基づく方法(反射率地図を用いない)。

物体面上の点P···(x, y, z),反射率地図···R(p,q)Pにおける法線方向··· $N = (\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1) = (p, q, -1)$ 

正射影による像形成…画像E(X,Y) = E(x,y)

反射率地図による方法

## 物体上の点(*x*, *y*, *z*(*x*, *y*))で次式が成立. E(x, y) = R(p(x, y), q(x, y)) $p(x, y) = z_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q(x, y) = z_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$

ディジタル画像 E<sub>ij</sub>に対し、次式を最小化.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (E_{ij} - R(p_{ij}, q_{ij}))^2$$
  
 $p_{ij}, q_{ij}$ の変分により、次式を得る.  
 $R(p_{ij}, q_{ij}) = E_{ij}$ 





最小化すべき評価関数  $F = \varepsilon^{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (E_{ij} - R(p_{ij}, q_{ij}))^{2} + \frac{\lambda}{\varepsilon^{2}} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} e_{ij}^{2}$ Fの最小化  $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial p_{\mu}} = 0, \frac{\partial F}{\partial q_{\mu}} = 0$ 

$$p_{ij} = \overline{p}_{ij} - \widetilde{q}_{ij} + \frac{\varepsilon^2}{\lambda} (E_{ij} - R(p_{ij}, q_{ij})) R_p(p_{ij}, q_{ij})$$
$$q_{ij} = \overline{q}_{ij} - \widetilde{p}_{ij} + \frac{\varepsilon^2}{\lambda} (E_{ij} - R(p_{ij}, q_{ij})) R_q(p_{ij}, q_{ij})$$

 $\overline{p}_{ij}, \overline{q}_{ij} \stackrel{*}{\to} \stackrel{*}{\to} \stackrel{*}{\to} \stackrel{*}{\to} \stackrel{*}{\to} \stackrel{*}{\to} \stackrel{*}{\to} \stackrel{*}{ij}, \widetilde{q}_{ij} \stackrel{*}{\to} \stackrel{$ 

左辺の $p_{ij}, q_{ij}$ を新しい $p_{ij}, q_{ij}$ と考えると、  $p_{ij}^{(k+1)} = \overline{p}_{ij}^{(k)} - \widetilde{q}_{ij}^{(k)} + \frac{\varepsilon^2}{\lambda} (E_{ij} - R(p_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)})) R_p(p_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)})$   $q_{ij}^{(k+1)} = \overline{q}_{ij}^{(k)} - \widetilde{p}_{ij}^{(k)} + \frac{\varepsilon^2}{\lambda} (E_{ij} - R(p_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)})) R_q(p_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)})$ という繰り返し型の漸化式が得られる.

面形状仮定に基づく方法

#### (MIT, Pentland)

物体画像 I(x, y)

面上の点における最大曲率と最小曲率が等しい.

-次微分 $I_x, I_y$ , 二次微分 $I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}$ 面の向き:  $(\tau, \sigma)$ は,  $\tan \tau = \frac{-(I_{xx} - I_{yy}) + \sqrt{(I_{xx} - I_{yy})^2 + I_{xy}^2}}{2I_{xy}},$  $\cos^2 \sigma = \frac{\nabla^2 I \cdot \tan \tau - \sec^2 \tau \cdot I_{xy}}{\nabla^2 I \cdot \tan \tau + \sec^2 \tau \cdot I_{xy}}$ 

Shape-From-Texture

• 画像のテクスチャから面の向きを推定.



 $\sigma: ベクトルNと画像面に垂直な/軸とのなす角$  $<math>\tau: ベクトルの画像面投影ベクトルとX軸との角$ 

#### 面上の輪郭線上の点 βにおける接線の角度:β

βの画像面での角度: α<sup>\*</sup> (幾何学的モデル)



単位球上でのNの統計的 分布モデル



pdf 
$$(\alpha^{*}(\beta) | \sigma, \tau) = pdf (\beta | \sigma, \tau) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \alpha^{*}}$$
  

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos \sigma}{\cos^{2}(\alpha - \tau) + \sin^{2}(\alpha - \tau) \cdot \cos^{2} \sigma}$$
n個の独立な  $\alpha$ の集合A<sup>\*</sup> = { $\alpha_{1}^{*}, \alpha_{2}^{*}, \dots, \alpha_{n}^{*}$ }  
pdf  $(A^{*} | \sigma, \tau) = \prod_{i=1}^{n} pdf (\alpha_{i}^{*} | \sigma, \tau)$   
pdf  $(\sigma, \tau)$ pdf  $(A^{*} | \sigma, \tau) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\pi^{-2} \sin \sigma \cos \sigma}{\cos^{2}(\alpha_{i}^{*} - \tau) + \sin^{2}(\alpha_{i}^{*} - \tau) \cos^{2} \sigma}$ 

A\*が与えられたときのoとtの相対的対数尤度L(o,  $\tau | A^*$ )  $L(\sigma, \tau | A^*) = \exp\{\sum_{i=1}^n a_i^* \log \frac{\pi^{-2} \sin \sigma \cos \sigma}{\cos^2(\alpha_i^* - \tau) + \sin^2(\alpha_i^* - \tau) \cos^2 \sigma}\}$ 

 $a_i^*$ は、画像中に現れる角度 $\alpha_i^*$ の度数

# $\sigma, \tau \delta p$ 個とq個の区間に等分割した $\tau$ -空間 $A^*$ が与えられたときの $\sigma_k \geq \tau_l$ の確率密度関数は 次式で近似される. $pdf(\sigma_k, \tau_l | A^*) \approx \frac{L(\sigma_k, \tau_l | A^*)}{\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} L(\sigma_i, \tau_j | A^*)}$

 $p \times q$ の $\sigma \tau$ 空間で最も大きな確率をとる( $\sigma, \tau$ )



i=1 i=1

### Shape-From-Distortion

- ある面上にあるテクスチャの見かけ上の 幾何学的歪から面の方向を求める。
- 主な方法

透視変換の性質から求める方法 歪度相関図より求める方法(内容は略)

#### 透視変換の性質による方法

空間上の点 $(x_0, y_0, z_0)$ を通り、傾き $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ の直線 *l*上の点  $p_t$  $p_t = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 

$$p_t$$
の画像上の点  $P_t$ の座標:  $\left(f \cdot \frac{x_0 + t\Delta x}{z_0 + t\Delta z}, f \cdot \frac{y_0 + t\Delta y}{z_0 + t\Delta z}\right)$ 

空間中の無限遠点p。を画像に投影した点…消失点

$$p_{\infty} = p_t \Big|_{t \to \infty}$$
であることから、 $P_{\infty}$ は $P_{\infty}: \left( f \cdot \frac{\Delta x}{\Delta z}, f \cdot \frac{\Delta y}{\Delta z} \right)$ 

消失点座標は直線の傾きだけで決定(f-定)

#### 空間の平面Sの勾配: $G = (p_s, q_s)$ 平面S上に図形ABCD(AB//CD, BC // DA) 図形ABCDの透視投影像:abcd









### ピンホールカメラの射影座標系表現

$$\widetilde{\boldsymbol{m}} = (U, V, S)^T, \widetilde{\boldsymbol{M}} = (X, Y, Z, T)^T$$
と表すと、  
 $\widetilde{\boldsymbol{m}} = \widetilde{\boldsymbol{P}}_0 \cdot \widetilde{\boldsymbol{M}} \qquad \widetilde{\boldsymbol{P}}_0$ :透視投影行列

射影空間P<sup>3</sup>から射影空間P<sup>2</sup>への線形写像



#### カメラパラメータの射影座標系表現

 $\begin{cases} 内部パラメータ… 画像座標の移動と倍率: <math>\tilde{H} \\$  外部パラメータ… カメラ系の回転と移動:  $\tilde{K} \\$   $\tilde{H} = \begin{pmatrix} k_u & 0 & t_u \\ 0 & k_v & t_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{K} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \widetilde{\mathbf{H}} \cdot \widetilde{\mathbf{P}}_{0} \cdot \widetilde{\mathbf{K}}$$

$$= \begin{pmatrix} k_{u} \ 0 & t_{u} \\ 0 & k_{v} & t_{v} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -f \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 & -f \ 0 \ 0 \\ 0 & 0 & 1 \ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} \ r_{12} \ r_{13} \ t_{x} \\ r_{21} \ r_{22} \ r_{23} \ t_{y} \\ r_{31} \ r_{32} \ r_{33} \ t_{z} \\ 0 & 0 & 1 \ \end{pmatrix}$$

 $\widetilde{\boldsymbol{m}} = \widetilde{\boldsymbol{P}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{M}}$ 

カメラキャリブレーション

\_\_\_\_> カメラの内部・外部パラメータの推定

第1段階:透視投影行列 P の推定 第2段階: P からの内部・外部パラメータの推定 透視投影行列 P の表現

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{Q}}_{1}^{T} \\ \widetilde{\mathbf{Q}}_{2}^{T} \\ \widetilde{\mathbf{Q}}_{3}^{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1}^{T} & q_{14} \\ \mathbf{q}_{2}^{T} & q_{24} \\ \mathbf{q}_{3}^{T} & q_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \end{bmatrix}$$



## 空間上の参照点 $M_i$ と、その像 $m_i$ $(i=1\cdots N)$ $\widetilde{m}_i = (su_i \ sv_i \ s)^T$ , $\widetilde{M}_i = (X_i \ Y_i \ Z_i \ 1)^T = (M_i^T \ 1)^T$ とすると、 $\widetilde{m}_i = \widetilde{\mathbf{P}} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}_i$

これを展開	$su_i = \mathbf{q}_1^T \mathbf{M}_i + q_{14}$
	$sv_i = \mathbf{q}_2^T \mathbf{M}_i + q_{24}$
	$s = \mathbf{q}_3^T \mathbf{M}_i + q_{34}$

s を消去して整理

$$\mathbf{q}_{1}^{T}\mathbf{M}_{i} - u_{i}\mathbf{q}_{3}^{T}\mathbf{M}_{i} + q_{14} - u_{i}q_{34} = 0$$
$$\mathbf{q}_{2}^{T}\mathbf{M}_{i} - v_{i}\mathbf{q}_{3}^{T}\mathbf{M}_{i} + q_{24} - v_{i}q_{34} = 0$$

## 両式を $q_{34}$ で割り、 $q_{ij} = q_{ij} / q_{34}$ とおく $\mathbf{q}_1^T \mathbf{M}_i - u_i \mathbf{q}_3^T \mathbf{M}_i + q_{14} = u_i$ $\mathbf{q}_2^T \mathbf{M}_i - v_i \mathbf{q}_3^T \mathbf{M}_i + q_{24} = v_i$

行列表現すると

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{i}^{T} & 1 & \boldsymbol{\theta}_{4}^{T} & -\boldsymbol{u}_{i} \boldsymbol{M}_{i}^{T} \\ \boldsymbol{\theta}_{4}^{T} & \boldsymbol{M}_{i}^{T} & 1 & -\boldsymbol{v}_{i} \boldsymbol{M}_{i}^{T} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{i} \\ \boldsymbol{v}_{i} \end{pmatrix}$$

ただし、 $\boldsymbol{C} = (q_{11} \ q_{12} \ q_{13} \cdots q_{32} \ q_{33})^T, \boldsymbol{\theta}_4 = (0\ 0\ 0\ 0)^T$ 

N個の参照点(*i*=1…*N*)では2*N*本の方程式が得られる.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1}^{T} & 1 & \mathbf{0}_{4}^{T} & -u_{1}\mathbf{M}_{1}^{T} \\ \mathbf{0}_{4}^{T} & \mathbf{M}_{1}^{T} & 1 & -v_{1}\mathbf{M}_{1}^{T} \\ & \cdots & \\ \mathbf{M}_{N}^{T} & 1 & \mathbf{0}_{4}^{T} & -u_{N}\mathbf{M}_{N}^{T} \\ \mathbf{0}_{4}^{T} & \mathbf{M}_{N}^{T} & 1 & -v_{N}\mathbf{M}_{N}^{T} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{2}N} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} u_{1} \\ v_{1} \\ \cdots \\ u_{n} \\ u_{N} \\ v_{N} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{2}N}$$

と表すと、2N本の方程式は行列式として

$$A \cdot C = R$$
  
と表される。これより、  
 $C = (A^T A)^{-1} A^T R$ 





#### ■ 画像上の点(u,v)から空間上の点(X,Y,Z)の推定が 可能

カメラパラメータ(内部・外部)推定

#### 空間座標計測のためには必ずしも必要とはしない

#### 透視投影行列の簡略化

理由:透視投影行列解析の不安定さの解消

### カメラキャリブレーションによる物体計測の例

・画像入力(4方向)
・画像のシルエット化
・3次元ボリューム
空間への逆投影
・ボクセルデータ作成
・3次元モデルとの 照合
・モデル変数の獲得



### 透視投影行列簡略化のためのカメラモデル



正射影,弱中心射影,擬似中心射影の透視投影行列 (射影行列)は,

いずれも  

$$\mathbf{P}_A = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ 0 & 0 & 0 & P_{34} \end{bmatrix}$$

の形式で表現可能

